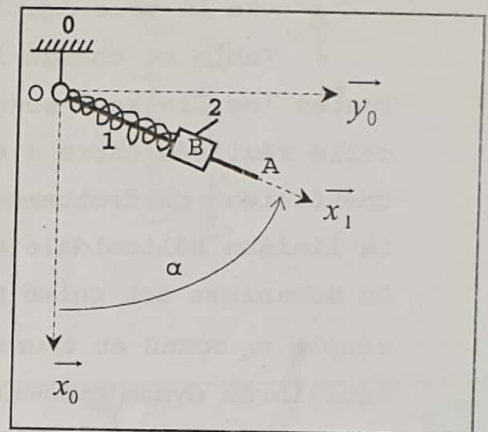


Exercice 1

Le mécanisme étudié est composé de :

- 0 : Bâti auquel est lié le repère galiléen $R_0(x_0, y_0, z_0)$. $\vec{g} = g\vec{x}_0$;
- 1 : bras assimilé à une tige rectiligne et homogène, de masse m_1 , de longueur L_1 et de centre de gravité G_1 . En liaison pivot parfaite d'axe $(0, \vec{z}_0)$ avec 0. $\vec{OA} = L_1\vec{x}_1$.
- 2 : Doigt assimilé à une masse ponctuelle (B, m_2) . En liaison glissière parfaite d'axe \vec{x}_1 avec 1. Un ressort de traction R à masse nulle de raideur k et de longueur initiale r_0 , est monté entre 2 et 1. $\vec{OB} = r\vec{x}_1$.



Le mécanisme est entraîné en mouvement par un moteur rotatif M_{01} monté entre 0 et 1 développant un couple C_{01} .

- 1- Déterminer la puissance galiléenne des efforts extérieurs sur l'ensemble $\Sigma = 1+2+R$;
- 2- Par une autre méthode, redéterminer la puissance galiléenne de l'action de la pesanteur sur Σ ;
- 3- Donner la puissance des interefforts entre les solides de Σ ;
- 4- Calculer C_{01} en fonction des données.

Exercice 2

Déterminer le torseur statique d'une liaison hélicoïdale parfaite de pas p à droite, et d'axe $(0, \vec{x})$, réalisée entre les solides S_1 et S_2 .

Exercice 3 :

Le système à étudier est une table de machine permettant de déplacer des charges.

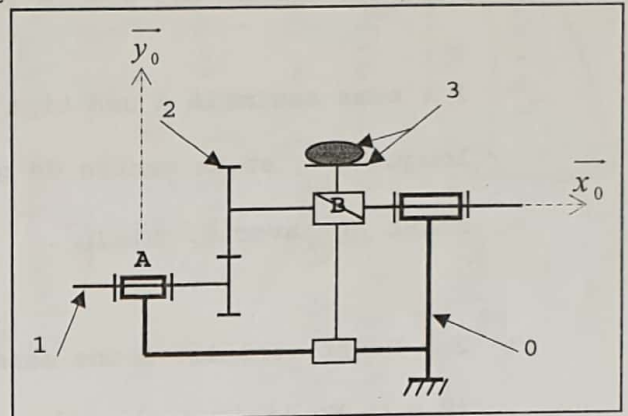
Elle est constituée de :

- Bâti 0 : auquel est lié le repère galiléen $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. $\vec{g} = -g\vec{y}_0$;
- Arbre moteur 1 : I_1 moment d'inertie de 1 par rapport à son axe de rotation et Z_1 nombre de dents de la roue dentée liée à 1 ;
- Vis 2 : I_2 moment d'inertie de 2 par rapport à son axe de rotation et Z_2 nombre de dents de la roue dentée liée à 2 ;
- Table et charge 3 : de masse M .

Toutes les liaisons sont parfaites sauf celle réalisée entre 3 et 0 de coefficient de frottement visqueux f .

La liaison hélicoïdale est de pas p à droite.

Le mécanisme est animé par un moteur M_{01} monté entre 0 et 1 développant un couple c_m connu et tournant à une vitesse ω_m . Les solides en rotation sont équilibrés dynamiquement.



Ecrire l'équation de mouvement du mécanisme.

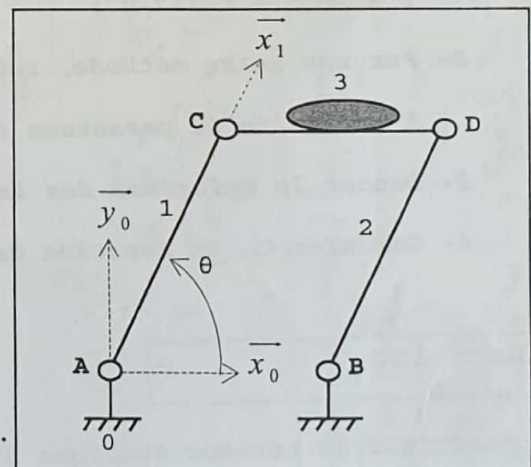
Exercice 4

Le schéma représente un monte charges constitué de :

- Bâti 0 : auquel est lié le repère galiléen $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. $\vec{g} = -g\vec{y}_0$;
- Bras 1 : assimilé à une tige rectiligne et homogène de masse m et de longueur L ;
- Bras 2 : identique à 1 ;
- Platine et charge 3 : de masse M ;

Toutes les liaisons sont parfaites sauf celle réalisée entre 0 et 1 de coefficient de frottement visqueux f .

Le mécanisme est animé par un moteur M_{01} monté entre 0 et 1 développant un couple c_m .

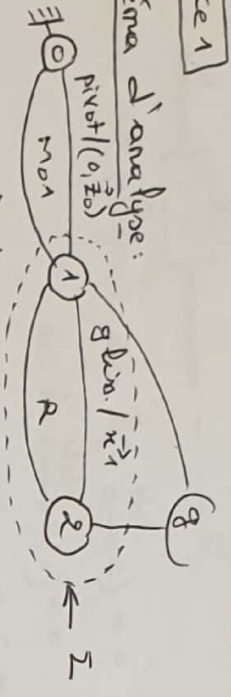


Déterminer c_m en fonction des données.

CORRIGE DU TD6 - ENERGETIQUE

Exercice 1

1) schéma d'analyse:



$E(\vec{\tau} \rightarrow \mathcal{I}/O) = E(\text{pivot} \rightarrow \mathcal{I}/O) + E(m_{01} \rightarrow \mathcal{I}/O) + E(g \rightarrow \mathcal{I}/O)$

$E(0 \rightarrow \mathcal{I}/O) = E(0 \leftrightarrow \mathcal{I}) = 0$ (Pivot parfaite)

$E(m_{01} \rightarrow \mathcal{I}/O) = \left\{ \begin{matrix} \tau_{m_{01} \rightarrow \mathcal{I}} \\ \tau_{\mathcal{I} \rightarrow m_{01}} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\} = \tau_{m_{01} \rightarrow \mathcal{I}} \dot{\varphi}$

$= \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \tau_{01} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} = \tau_{01} \dot{\alpha}$

$E(g \rightarrow \mathcal{I}/O) = E(g \rightarrow \mathcal{I}/O) + E(g \rightarrow \mathcal{I}/O)$

$= \left\{ \begin{matrix} +m_1 g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m_2 g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} - \\ \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}$

$= m_1 g \vec{x}_0 \cdot \dot{\alpha} \vec{z}_0 + m_2 g \vec{x}_0 \cdot \dot{\alpha} \vec{z}_0$

$= \underbrace{m_1 g \vec{x}_0 \cdot \dot{\alpha} \vec{z}_0}_{\frac{d}{dt}(\vec{x}_0 \cdot \vec{0} \vec{g}_1)} + \underbrace{m_2 g \vec{x}_0 \cdot \dot{\alpha} \vec{z}_0}_{\frac{d}{dt}(\vec{x}_0 \cdot \vec{0} \vec{g}_2)}$

$= \frac{d}{dt} \left(\frac{L_1}{2} \cos \alpha \right)$

donc: $E(g \rightarrow \mathcal{I}/O) = -g \left[m_1 \frac{L_1}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha + m_2 (r \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{r} \cos \alpha) \right]$

Pour: $E(\vec{\tau} \rightarrow \mathcal{I}/O) = G_1 \dot{\alpha} - g \left[m_1 \frac{L_1}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha + m_2 (r \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{r} \cos \alpha) \right]$

20) $E(g \rightarrow \mathcal{I}/O) = -\frac{d}{dt} V(g \rightarrow \mathcal{I}/O)$

$= -m_1 \vec{g} \cdot \vec{0} \vec{g}_2 = -m_1 g \vec{0} \vec{g}_1 - m_2 \vec{g} \cdot \vec{0} \vec{g}_2$

$E(g \rightarrow \mathcal{I}/O) = g \left(-\frac{L_1}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha + m_2 (r \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{r} \cos \alpha) \right)$

30) $E_{\text{int}} = E(\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{I}) + E(\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{I})$

$= 0$ (parfaite)

$E_{\text{int}} = -k \dot{r} (r - r_0)$

40) T.E.C $\vec{a} \cdot \vec{z}_0$

$\frac{d}{dt} T(\mathcal{I}/O) = \frac{P(\vec{\tau} \rightarrow \mathcal{I}/O)}{Q_1} + \frac{P_{\text{int}}}{Q_3}$

$T(\mathcal{I}/O) = T(\mathcal{I}/O) + T(\mathcal{I}/O)$

(1 horne / axe fixe)

$T(\mathcal{I}/O) = \frac{1}{2} \underbrace{m_1 \frac{L_1^2}{3}}_{\tau_{01} \vec{z}_0} \dot{\alpha}^2$

$T(\mathcal{I}/O) = \frac{1}{2} m_2 \dot{V}(\mathcal{I}/O)$

$= \frac{1}{2} m_2 (r \dot{\alpha}^2 + \dot{r}^2)$

$= \frac{1}{2} m_2 (r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{r}^2)$

(2 et une masse ponctuelle)

$\frac{d}{dt} T(\mathcal{I}/O) = m_1 \frac{L_1^2}{3} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m_2 (r \ddot{\alpha} + \dot{r} \dot{\alpha}^2 + r \dot{\alpha} \ddot{\alpha}) = G_1 \dot{\alpha} - g \left[m_1 \frac{L_1}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha + m_2 (r \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{r} \cos \alpha) \right] - k \dot{r} (r - r_0)$

1/4

Exercice 2



La liaison est parfaite $\Leftrightarrow P(1 \leftrightarrow 2) = 0$

$\Leftrightarrow P(1 \xrightarrow{Hd} 2|1) = 0$ (*)

$\Leftrightarrow \{ T(2|1) \} = \{ 0 \}$

$Dn_a: \{ T(2|1) \} = \begin{Bmatrix} \omega_x & N_x \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ 2l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

Donc $\{ T(1 \xrightarrow{Hd} 2) \} = \begin{Bmatrix} X & Y \\ Z & M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

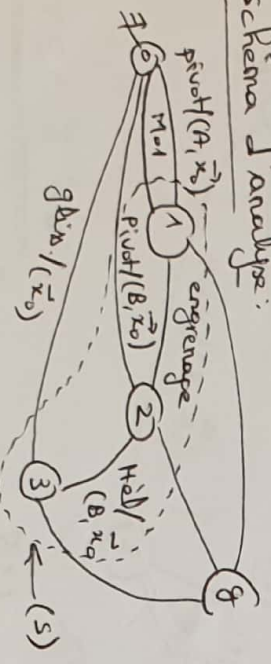
(*) $\Rightarrow X \cdot N_x + \omega_x \cdot L = 0$

$\rightarrow L = -X \cdot \frac{N_x}{\omega_x} = -\frac{P}{2\pi} \cdot X$

Donc $\{ T(1 \xrightarrow{Hd} 2) \} = \begin{Bmatrix} X & Y \\ Z & M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

Exercice 3

schéma d'analyse:



T.E.C à 5/R0

$\frac{d}{dt} T(s|R_0) = P(\bar{s} \rightarrow s|0) + P_{int}$

* $T(s|0) = T(1|0) + T(2|0) + T(3|0)$

$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$ (Rotation/axe fixe) $\frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$ (Rotation/axe fixe) $\frac{1}{2} M V^2$ (Translation)

Rotation/axe fixe

$D_r: \frac{\omega_2|0}{\omega_1|0} = -\frac{Z_1}{Z_2} = R$ (rapport de réduction de l'engrenage 1-2)

$D_t: V_{3|0} = -\frac{P}{2\pi} \omega_2|0$

$= -\frac{P R}{2\pi} \omega_1|0$

$d_t: \omega_2|0 = \omega_m$

Donc $T(s|R_0) = \frac{1}{2} \left(I_1 + R \cdot I_2 + \left(\frac{P R}{2\pi} \right)^2 \cdot M \right) \omega_m^2$

Jeq : moment d'inertie équivalent vu sur l'arbre 1.

* $P(\bar{s} \rightarrow s|0) = P(0 \xrightarrow{Piv} 1|0) + P(m_1 \rightarrow 1|0) + P(0 \xrightarrow{Piv} 2|0) + P(0 \xrightarrow{Piv} 3|0) + P(g \rightarrow 3|0)$

$P(0 \xrightarrow{Piv} 1|0) = P(g \rightarrow 3|0) + P(g \rightarrow 3|0)$

$P(0 \xrightarrow{Piv} 2|0) = 0$ (liaisons parfaites)

$P(m_1 \rightarrow 1|0) = C_m \cdot \omega_m$

$P(g \rightarrow 3|0) = 0$ (le poids ne travaille pas)

$P(0 \xrightarrow{Piv} 3|0) = \{ T(0 \rightarrow 3) \} \cdot \{ V(3|0) \}$

$$L(0 \rightarrow 3/0) = \begin{cases} -f \cdot V_{(3/0)}^2 \\ \frac{1}{2} M \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases} \left| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \right. \cdot \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} V_{(3/0)} \\ 0 \end{matrix} \right. \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} (x_0, -) \\ (x_0, -) \end{matrix}$$

$$= -f \cdot V_{(3/0)}^2$$

$$= -f \cdot \left(\frac{PB}{2\pi} \right)^2 \cdot \omega_m^2$$

d'où: $L(\bar{\Sigma} \rightarrow 3/0) = C_m \cdot \omega_m - f \left(\frac{PB}{2\pi} \right)^2 \cdot \omega_m^2$

* $P_{int} = 0$ (liaisons parfaites).

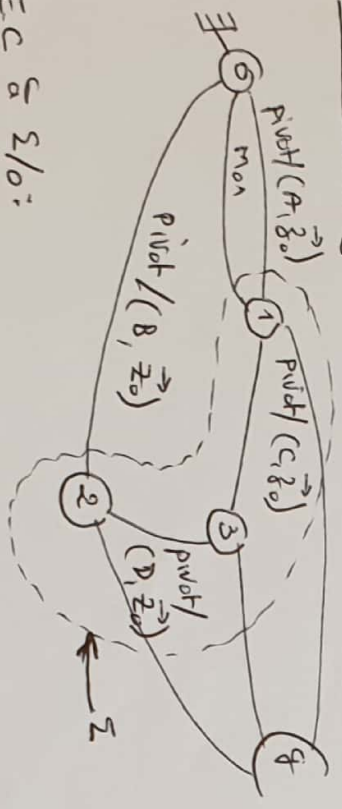
T.E.C $\Rightarrow \delta_{eq} \cdot \omega_m = C_m \omega_m - f \left(\frac{PB}{2\pi} \right)^2 \cdot \omega_m$

d'où l'éq:

$$\delta_{eq} \cdot \omega_m - C_m + f \left(\frac{PB}{2\pi} \right)^2 \cdot \omega_m = 0$$

Exercice 4

schéma d'analyse:



T.E.C $\bar{\Sigma} \rightarrow 2/0$:

$$\frac{d}{dt} T(\bar{\Sigma}/0) = L(\bar{\Sigma} \rightarrow 2/0) + P_{int}$$

3/4

* $T(\bar{\Sigma}/0) = T(1/0) + T(2/0) + T(3/0)$ ($T(1/0) = T(2/0)$)
 $= 2T(1/0) + T(3/0)$

$T(1/0) = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{3} \cdot \dot{\theta}^2$ (rotation / axe fixe)

$T(2/0) = \frac{1}{2} M \cdot \dot{\vec{v}}_{(C/3/0)}^2$ (translation)

$\vec{v}_{(C/3/0)} = \frac{d}{dt} \vec{AC} \Big|_{R_0} = L \dot{\theta} \vec{y}_1$

$T(2/0) = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$

d'où: $T(\bar{\Sigma}/0) = \frac{1}{2} \left[2m \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 + M L^2 \dot{\theta}^2 \right]$

$T(\bar{\Sigma}/0) = \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{3} + M \right) L^2 \dot{\theta}^2$

* $L(\bar{\Sigma} \rightarrow 2/0) = L(0 \rightarrow 1/0) + L(1/0 \rightarrow 2/0) + L(0 \rightarrow 2/0)$

$L(g \rightarrow 2/0)$

$L(0 \rightarrow 1/0) = \left\{ T(0 \rightarrow 1) \right\} \cdot \left\{ L(1/0) \right\} = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\} \left| \begin{matrix} L \\ M \\ -f_0 \end{matrix} \right. \cdot \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$

$= -f \cdot \dot{\theta}^2$

$L(1/0 \rightarrow 2/0) = C_m \dot{\theta}$

$L(0 \rightarrow 2/0) = 0$ (parfait)

$L(g \rightarrow 2/0) = -\frac{d}{dt} V(g \rightarrow 2/0)$

$V(g \rightarrow 2/0) = -m \vec{g} \cdot \vec{OG} = -g \vec{y}_0 \cdot (m \vec{OG}_1 + m \vec{OG}_2 + M \vec{OC})$

$= -g \left(m \vec{y}_0 \cdot \frac{L}{2} \vec{x}_1 + m \vec{y}_0 \cdot \frac{L}{2} \vec{x}_1 + M \cdot L \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 \right)$

$= -g \left(2m \frac{L}{2} \sin \theta + M L \sin \theta \right)$

$= -g L (m + M) \sin \theta$

soit alors : $L(g \rightarrow \Sigma/0) = -g L \dot{\theta} (m+m) \cos \theta$

Donc :

$$L(\Sigma \rightarrow \Sigma/0) = c_m \dot{\theta} - f \dot{\theta}^2 - g L \dot{\theta} (m+m) \cos \theta$$

* $F_{\text{int}} = D$ (liaisons parfaites)

T.E.C \Rightarrow

$$\left(\frac{2m}{3} + m\right) L^2 \ddot{\theta} = c_m \dot{\theta} - f \dot{\theta}^2 - g L \dot{\theta} (m+m) \cos \theta$$

soit alors :

$$c_m = \left(\frac{2m}{3} + m\right) L^2 \ddot{\theta} + f \dot{\theta} + g L (m+m) \cos \theta$$

GAMME DE ROBOTS PORTIQUES

Lorsque son architecture est de type portique, un robot est constitué de deux chariots et d'une colonne sur laquelle est articulé un poignet orientable possédant un système de préhension. On a donc 3 directions de translation définies par la base orthonormée directe $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. On utilisera la terminologie consacrée et on parlera « d'axe » en translation qu'on notera X, Y et Z (figures 1, 2).

La gamme de robots étudiée est destinée à la manutention dans les industries automobiles (chargement, déchargement de machines d'usinage notamment).

Le constructeur souhaite construire cette gamme de robots sur une base d'éléments communs. Les différents robots ont donc la même architecture générale et se distinguent entre eux par leurs performances: masse maximale portée, précision de positionnement, accélération.

Dans cette optique, la conception d'un robot portique pour une application particulière est très rapide puisqu'elle fait appel à un certain nombre de structures mécaniques génériques.

Le robot portique est principalement constitué de sept solides $(S_i)_{i=0...6}$ et de six actionneurs. Les caractéristiques cinétiques données pour chaque solide tiennent compte des parties des actionneurs qui lui sont rigidement liées. Les caractéristiques cinétiques des autres composants mécaniques intervenant

- dans la motorisation des différents solides $(S_i)_{i=4,5,6}$ sont négligées,
- dans la motorisation des différents solides $(S_i)_{i=1,2,3}$ sont précisées

On note S_0 le portique auquel est associé le repère galiléen $R_0(O; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ avec \bar{z} vertical descendant. On note $\bar{g} = g\bar{z}$ l'accélération de la pesanteur.

Solide S_1 : chariot à déplacement longitudinal (« axe » X)

- le repère $R_1(O_1; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est lié à S_1 . Le mouvement de S_1/S_0 est une translation rectiligne, de direction \bar{x} , commandée par un actionneur \mathcal{M}_{10} . La position de S_1 par rapport à S_0 est donnée par $\overrightarrow{OO_1} \cdot \bar{x} = x$
- la masse de S_1 est notée m_1 .

Solide S_2 : chariot à déplacement transversal (« axe » Y)

- le repère $R_2(O_2; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est lié à S_2 . Le mouvement de S_2/S_1 est une translation rectiligne, de direction \bar{y} , commandée par un actionneur \mathcal{M}_{21} . La position de S_2 par rapport à S_1 est donnée par $\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \bar{y} = y$
- la masse de S_2 est notée m_2 .

Solide S_3 : colonne à déplacement vertical (« axe » Z)

- le repère $R_3(O_3; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est lié à S_3 . Le mouvement de S_3/S_2 est une translation rectiligne, de direction \bar{z} , commandée par un actionneur \mathcal{M}_{23} . La position de S_3 par rapport à S_2 est donnée par $\overrightarrow{O_2O_3} \cdot \bar{z} = z$
- la masse de S_3 est notée m_3 .

Solide S_4 : première unité de rotation du poignet

- le repère $R_4(O_3; \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z})$ est lié à S_4 . Le mouvement de S_4/S_3 est une rotation autour de $(O_3; \bar{z})$ commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{3,4}$ monté entre S_4 et S_3 . La position de S_4 par rapport à S_3 est donnée par le paramètre $(\bar{x}_4, \bar{x}_4) = (\bar{y}_4, \bar{y}_4) = \alpha$.
- la masse de S_4 est notée m_4 et son centre d'inertie G_4 est défini par $\overrightarrow{O_3G_4} = d\bar{z}$ avec d constante positive.
- le moment d'inertie de S_4 par rapport à l'axe $(O_3; \bar{z})$ est noté I .

Solide S_5 : deuxième unité de rotation du poignet

- le repère $R_5(O_3; \bar{x}_4, \bar{y}_5, \bar{z}_5)$ est lié à S_5 . Le mouvement de S_5/S_4 est une rotation autour de $(O_3; \bar{x}_4)$ commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{4,5}$ monté entre S_5 et S_4 . La position de S_5 par rapport à S_4 est donnée par le paramètre $(\bar{y}_4, \bar{y}_5) = (\bar{z}_5, \bar{z}_5) = \beta$.
- la masse de S_5 est notée m_5 et son centre d'inertie G_5 est défini par $\overrightarrow{O_3G_5} = h\bar{z}_5$ avec h constante positive.
- l'opérateur d'inertie en O_3 de S_5 est connu par la matrice associée à la base $(\bar{x}_4, \bar{y}_5, \bar{z}_5)$:

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}$$

Solide S_6 : troisième unité de rotation du poignet et charge transportée par le robot portique

- le repère $R_6(O_3; \bar{x}_6, \bar{y}_6, \bar{z}_5)$ est lié à S_6 . Le mouvement de S_6/S_5 est une rotation autour de $(O_3; \bar{z}_5)$ commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{5,6}$ monté entre S_6 et S_5 . La position de S_6 par rapport à S_5 est donnée par le paramètre $(\bar{x}_4, \bar{x}_6) = (\bar{y}_5, \bar{y}_6) = \gamma$.
- la masse de S_6 est notée $(m_6 + \mu)$ avec m_6 masse de l'unité de rotation du poignet et μ masse de la charge transportée. Le centre d'inertie G_6 de S_6 est défini par ses coordonnées $(a, 0, c)$ dans le repère R_6 (a et c sont des constantes positives).
- l'opérateur d'inertie en O_3 de S_6 est connu par la matrice associée à la base $(\bar{x}_6, \bar{y}_6, \bar{z}_5)$:

$$\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

Toutes les liaisons $\mathcal{L}_{i,i+1}$ entre les solides S_i et S_{i+1} ($i=0, \dots, 5$) sont supposées parfaites.

On s'intéresse à une phase de déchargement (ou de chargement) pendant laquelle x et y sont fixés, seuls les paramètres z , α , β et γ sont variables.

Les actions mécaniques de l'actionneur $\mathcal{M}_{3,4}$ sur S_4 (resp. $\mathcal{M}_{4,5}$ sur S_5 et $\mathcal{M}_{5,6}$ sur S_6) sont modélisées par un couple de moment $\mathcal{C}_{3,4}\bar{z}$ (resp. $\mathcal{C}_{4,5}\bar{x}_4$ et $\mathcal{C}_{5,6}\bar{z}_5$). Le choix des actionneurs $\mathcal{M}_{3,4}$, $\mathcal{M}_{4,5}$ et $\mathcal{M}_{5,6}$ nécessite la connaissance de $\mathcal{C}_{3,4}$, $\mathcal{C}_{4,5}$, $\mathcal{C}_{5,6}$.

1.2.2 CINEMATIQUE

Exprimer les composantes (p, q, r) de $\vec{\Omega}(S_6/R_0)$, vecteur vitesse de rotation du solide S_6 par rapport à R_0 , sur la base associée à R_6 .

Déterminer les expressions des vecteurs vitesse suivants :

$$\vec{V}(O_3 / R_0), \vec{V}(G_6 / R_0)$$

en fonction des paramètres de position, de la dérivée temporelle de z , de p , q , r et des paramètres géométriques.

1.2.3 CINÉTIQUE

Déterminer les grandeurs ou expressions suivantes :

$\bar{z} \cdot \bar{\sigma}(O_3, S_4 / R_0)$: moment cinétique par rapport à l'axe (O_3, \bar{z}) du solide S_4 en mouvement par rapport à R_0 en fonction de la dérivée temporelle de α et des données massiques ;

$\bar{\sigma}(O_3, S_5 / R_0)$: moment cinétique au point O_3 du solide S_5 en mouvement par rapport à R_0 en fonction des paramètres de position, de leurs dérivées, des paramètres géométriques et des données massiques ;

$\bar{\sigma}(O_3, S_6 / R_0)$: moment cinétique au point O_3 du solide S_6 en mouvement par rapport à R_0 en fonction des paramètres de position, de la dérivée temporelle de z , de p , q , r et des paramètres géométriques.

1.2.4. DYNAMIQUE

A l'aide d'une analyse clairement explicitée, préciser les sous-systèmes à isoler et les équations issues des théorèmes fondamentaux de la dynamique à utiliser pour déterminer \mathcal{L}_{34} , \mathcal{L}_{45} et \mathcal{L}_{56} .

Expliciter \mathcal{L}_{56} en fonction des paramètres de position, de p , q , r , des dérivées temporelles de z , p , q , r , des paramètres géométriques et des données massiques.

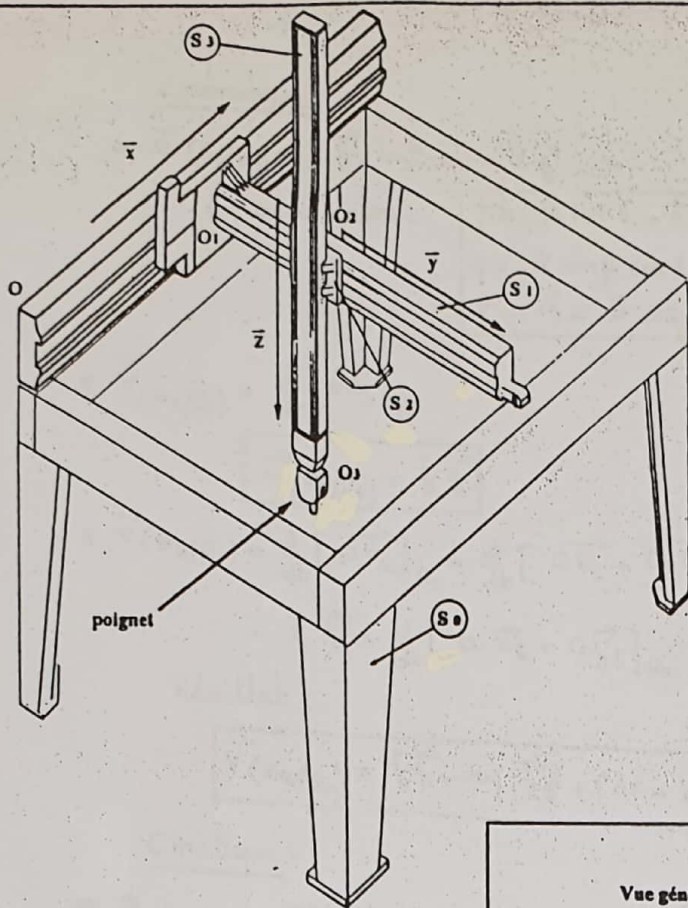


Figure 1
Vue générale du robot portique seul

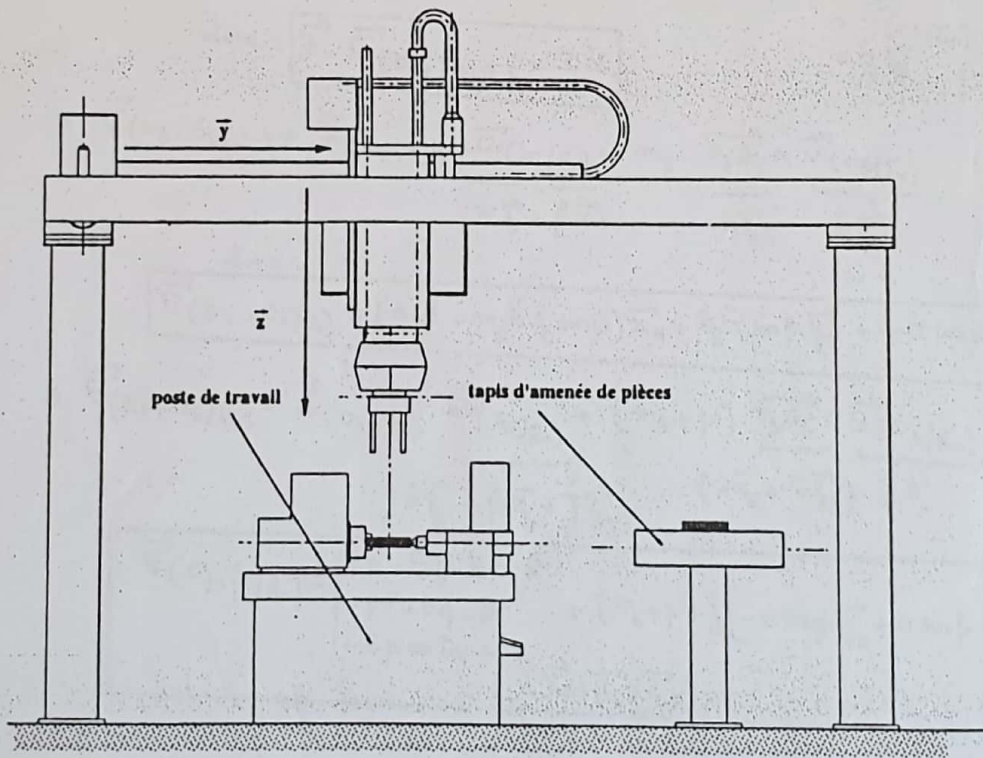


Figure 2
Vue du robot portique en situation dans une cellule de travail

Corrigé

Cinématique:

$$* \vec{\Omega}(S_6/R_0) = \dot{\gamma} \vec{z}_5 + \dot{\beta} \vec{x}_4 + \dot{\alpha} \vec{z}_3$$

on aura alors:

$$\begin{cases} p = \dot{\beta} \cos \gamma + \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma \\ q = \dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma \\ r = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta \end{cases}$$

$$* \vec{V}(O_3/R_0) = \frac{d}{dt} (\vec{OO}_3)_{R_0}$$

$$\vec{V}(O_3/R_0) = \dot{\gamma} \vec{z}_3$$

$$\begin{aligned} * \vec{V}(G_6/R_0) &= \frac{d}{dt} [\vec{OG}_6]_{R_0} = \frac{d}{dt} [\vec{OO}_3 + \vec{O}_3 G_6]_{R_0} \\ &= \dot{\gamma} \vec{z}_3 + \frac{d}{dt} [a \vec{x}_6 + c \vec{z}_5]_{R_0} \end{aligned}$$

Résultat:

$$\vec{V}(G_6/R_0) = \dot{\gamma} \vec{z}_3 - a \dot{\gamma} \vec{z}_5 + (a \dot{\gamma} - c \dot{\gamma}) \vec{y}_6 + c \dot{\gamma} \vec{x}_6$$

Cinétique:

$$\begin{aligned} * \vec{F} \cdot \vec{G}(O_3, S_4/R_0) &= \vec{F} \cdot [\vec{I}(O_3, S_4) \cdot \vec{\Omega}(S_4/R_0) + m_4 \vec{OG}_4 \wedge \vec{V}(O_3, S_4/R_0)] \\ &= \vec{F} \cdot \vec{G}(O_3/R_0) \quad \text{car } \frac{d}{dt} \left[\begin{matrix} O_3 \in S_4, S_5 \text{ et } S_6 \\ O_3 \in S_3 \end{matrix} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc: } \vec{F} \cdot \vec{G}(O_3, S_4/R_0) = \vec{I} \ddot{\alpha}$$

$$* \vec{G}(O_3, S_5/R_0) = \vec{I}(O_3, S_5) \cdot \underbrace{\vec{\Omega}(S_5/R_0)}_{\dot{\alpha} \vec{z}_3 + \dot{\beta} \vec{x}_4} + m_5 \underbrace{\vec{OG}_5}_{h \vec{z}_5} \wedge \underbrace{\vec{V}(O_3/R_0)}_{\dot{\gamma} \vec{z}_3}$$

donc:

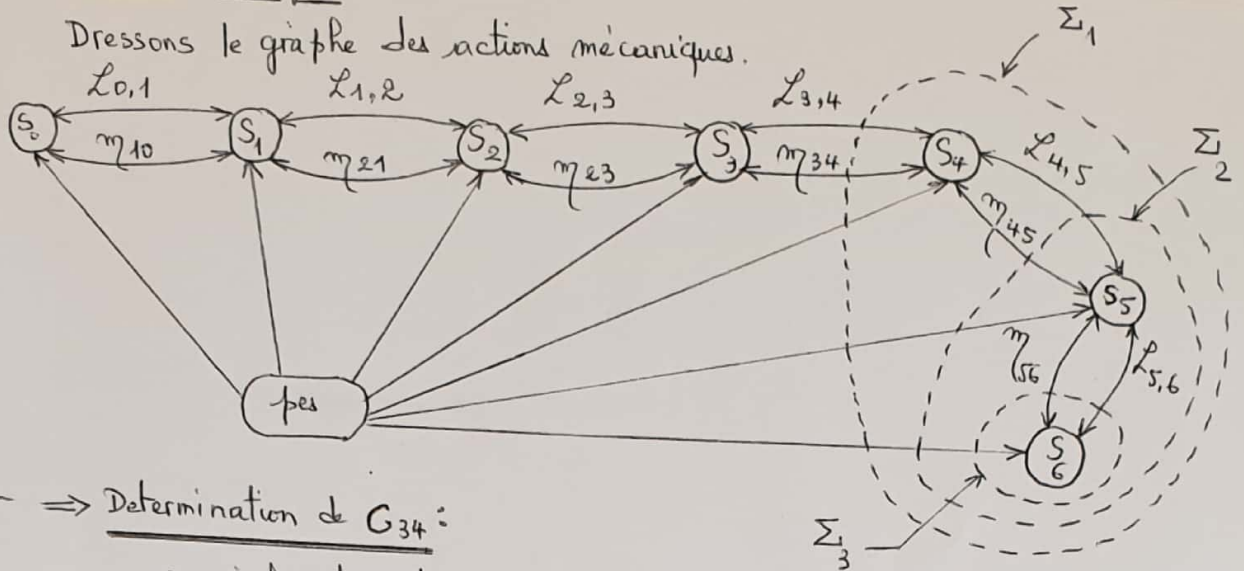
$$\vec{G}(O_3, S_5/R_0) = (A_5 \dot{\beta} - m_5 h \dot{\gamma} \sin \beta) \vec{x}_4 + B_5 \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_5 + C_5 \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_5$$

$$* \vec{G}(O_3, S_6/R_0) = \vec{I}(O_3, S_6) \cdot \underbrace{\vec{\Omega}(S_6/R_0)}_{\dot{\alpha} \vec{z}_3 + \dot{\beta} \vec{x}_4 + \dot{\gamma} \vec{z}_5} + (m_6 + P) \underbrace{\vec{OG}_6}_{(a \vec{x}_6 + c \vec{z}_5)} \wedge \underbrace{\vec{V}(O_3/R_0)}_{\dot{\gamma} \vec{z}_3}$$

$$\vec{G}(O_3, S_6/R_0) = \begin{pmatrix} A_6 - Fq - Er \\ -Pq + B_6q - Dr \\ -Ea + Dq + Cr \end{pmatrix} + (m_6 + P) \dot{\gamma} \begin{pmatrix} -a \cos \beta \vec{y}_6 + a \sin \beta \cos \gamma \vec{z}_5 - c \sin \beta \vec{x}_4 \end{pmatrix}$$

Analyse:

Dressons le graphe des actions mécaniques.



- \Rightarrow Determination de C_{34} :

on isole le système $\Sigma_1 = S_4 \cup S_5 \cup S_6$.

Appliquons le p.F.D:

$$\begin{aligned} \{D(\Sigma_1/R_0)\} &= \{ \vec{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1 \} \\ &= \{ S_3 \xrightarrow{L_{3,4}} S_4 \} + \{ S_3 \xrightarrow{m_{34}} S_4 \} + \{ pes \rightarrow \Sigma_1 \} \\ \vec{0}_3 \cdot \vec{m}_{0_3} \{ S_3 \xrightarrow{L_{3,4}} S_4 \} &= 0 \quad | \quad C_{34} = \vec{0}_3 \cdot \vec{m}_{0_3} \{ S_3 \xrightarrow{m_{34}} S_4 \} \end{aligned}$$

On applique donc le T.M.D au point O_3 en \forall pt. -- projection sur $\vec{0}_3$.

$$\begin{aligned} \vec{0}_3 \cdot \vec{0}_3(\Sigma_1/R_0) &= C_{34} + \vec{0}_3 \cdot \vec{m}_{0_3} \{ pes \rightarrow \Sigma_1 \} \\ \vec{0}_3 \cdot \left(\sum_{i=4}^6 \vec{0}_3 \vec{G}_i \wedge m_i \vec{g} \vec{0}_3 \right) &= 0. \end{aligned}$$

donc:

$$C_{34} = \vec{0}_3 \cdot \vec{0}_3(\Sigma_1/R_0)$$

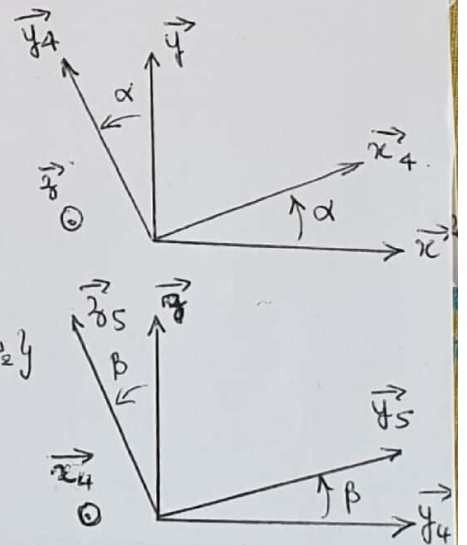
\Rightarrow Determination de C_{45} :

on isole le syst. $\Sigma_2 = S_5 \cup S_6$.

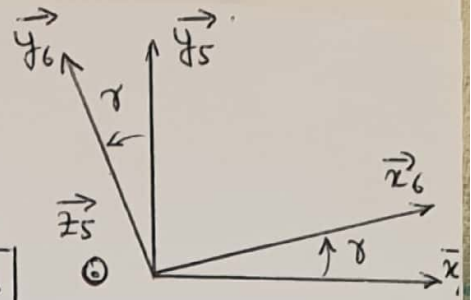
P.F.D appliqué à Σ_2 :

$$\begin{aligned} \{D(\Sigma_2/R_0)\} &= \{ \vec{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2 \} \\ &= \{ S_4 \xrightarrow{L_{4,5}} S_5 \} + \{ S_4 \xrightarrow{m_{45}} S_5 \} + \{ pes \rightarrow \Sigma_2 \} \\ \vec{x}_4 \cdot \vec{m}_{0_4} \{ S_4 \xrightarrow{L_{4,5}} S_5 \} &= 0 \quad | \quad C_{45} = \vec{x}_4 \cdot \vec{m}_{0_4} \{ S_4 \xrightarrow{m_{45}} S_5 \} \end{aligned}$$

T.M.D au pt. O_4 , en projection sur \vec{x}_4 :



$$\vec{x}_4 \cdot \vec{S}(O_3, \Sigma_2/R_0) = C_{45} + \underbrace{\vec{x}_4 \cdot \vec{m}_{O_3} \{ \text{pes} \rightarrow \Sigma_2 \}}_{\vec{x}_4 \cdot \left(\sum_{i=5}^6 \vec{O}_3 \vec{G}_i \wedge m_i \vec{g} \right)}$$



on trouve :

$$C_{45} = \vec{x}_4 \cdot \vec{S}(O_3, \Sigma_2/R_0) + g [(-m_5 h - (m_6 + \mu)c) \sin \beta + a(m_6 + \mu) \cos \beta \cdot \sin \gamma]$$

⇒ Determination de C56 :

On isole le syst. $\Sigma_3 = S_6$.

P.F.D appliqué à Σ_3 .

$$\begin{aligned} \{ D(\Sigma_3/R_0) \} &= \{ \bar{\Sigma}_3 \rightarrow \Sigma_3 \} \\ &= \{ S_5 \xrightarrow{\mathcal{L}_{5,6}} S_6 \} + \{ S_5 \xrightarrow{\eta_{56}} S_6 \} + \{ \text{pes} \rightarrow S_6 \} \\ \vec{z}_5 \cdot \vec{m}_{O_3} \{ S_5 \xrightarrow{\mathcal{L}_{5,6}} S_6 \} &= 0 \quad \vec{z}_5 \cdot \vec{m}_{\text{pt}} \{ S_5 \xrightarrow{\eta_{56}} S_6 \} = C_{56} \end{aligned}$$

T.M.D au pt. O_3 en projection sur \vec{z}_5 :

$$\vec{z}_5 \cdot \vec{S}(O_3, S_6/R_0) = C_{56} + \vec{z}_5 \cdot (O_3 \vec{G}_6 \wedge (m_6 + \mu) \vec{g})$$

On trouve :

$$C_{56} = \vec{z}_5 \cdot \vec{S}(O_3, S_6/R_0) - a(m_6 + \mu) g \sin \beta \cdot \cos \gamma$$

Dynamique

Nous avons trouvé l'expression :

$$C_{56} = \vec{z}_5 \cdot \vec{S}(O_3, S_6/R_0) - a(m_6 + \mu) g \sin \beta \cdot \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{or: } \vec{z}_5 \cdot \vec{S}(O_3, S_6/R_0) &= \vec{z}_5 \cdot \frac{d}{dt} [\vec{V}(O_3, S_6/R_0)]_{R_0} + \vec{z}_5 \cdot (m_6 + \mu) [\vec{V}(O_3/R_0) \wedge \vec{V}(O_6/R_0)] \\ &= \frac{d}{dt} [\vec{z}_5 \cdot \vec{V}(O_3, S_6/R_0)] - \vec{V}(O_3, S_6/R_0) \cdot \frac{d}{dt} \vec{z}_5 + (m_6 + \mu) \vec{V}(O_3/R_0) \cdot \left[\vec{z}_5 \wedge \vec{V}(O_3/R_0) \right] \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} C_{56} = \frac{d}{dt} [-E p - D q + C r + (m_6 + \mu) a \dot{\gamma} \sin \beta \cdot \cos \gamma] - \ddot{\alpha} \sin \beta \cdot \cos \gamma (A p - F q - E r) + \\ \ddot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma \cdot [-P f + B q - D r] - (m_6 + \mu) \dot{\gamma} [a \cos \beta \cdot (\ddot{\alpha} \sin \beta \cdot \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma)] - \\ C \sin \beta \cdot \ddot{\alpha} \cdot \sin \gamma - (m_6 + \mu) \dot{\gamma} \sin \beta \cdot [C q \cos \gamma - (a r - C p) \sin \gamma] \end{aligned}$$

(Adapté des Mines-Ponts 2003 – MP)

ETUDE D'UNE TELECABINE A STABILITE ACCRUE : LE FUNITEL

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.



Funitel de La Plagne (Photo Joël FAVRE)

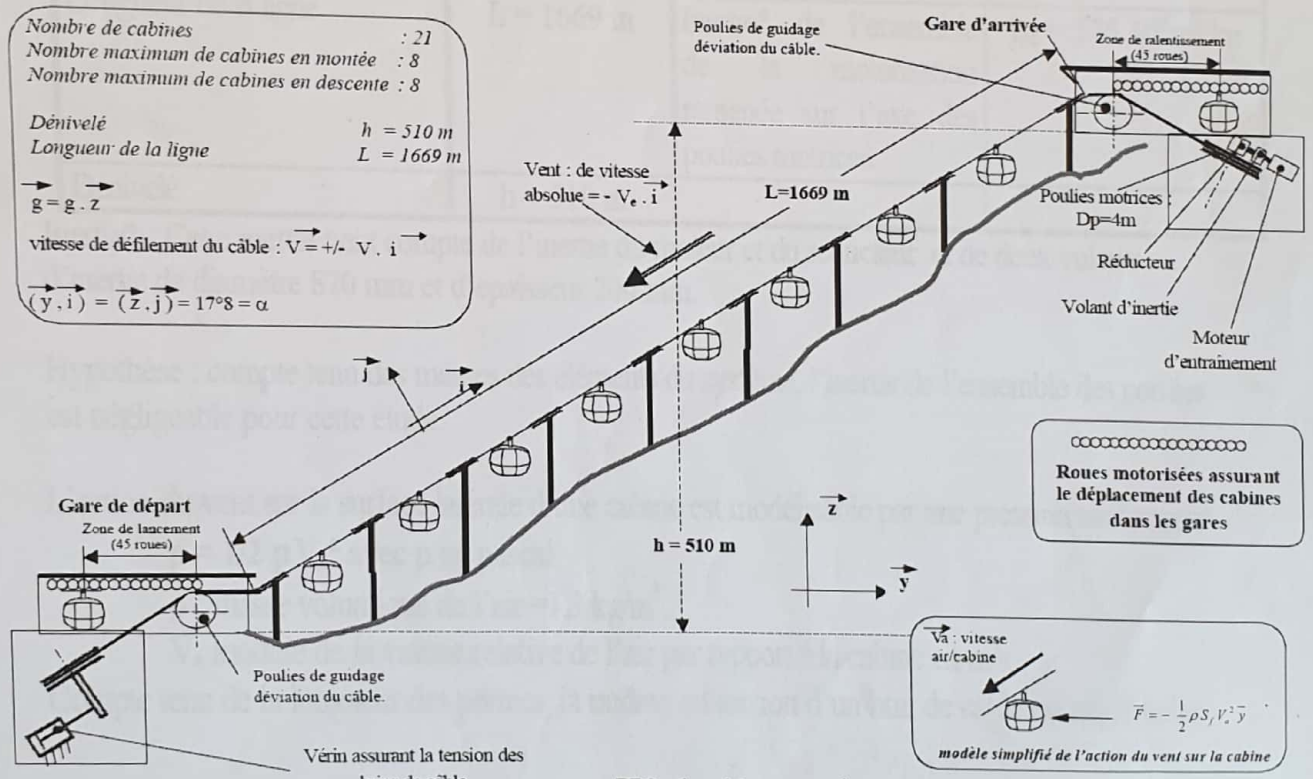


FIG. 1 : Ligne totale

Le tableau ci-dessous précise les données caractéristiques de l'installation :

Extrait du cahier des charges		Autres caractéristiques techniques	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	$M_c = 2500 \text{ kg}$
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	$S_l = 10 \text{ m}^2$
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	$S_f = 7,1 \text{ m}^2$
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 $M_p = 2080 \text{ kg}$	Masse linéique du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	$V = 7,2 \text{ m/s}$	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	$N = 1700 \text{ tr/min}$	Diamètre d'une poulie motrice :	$D_p = 4 \text{ m}$
Longueur de la ligne	$L = 1669 \text{ m}$	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$
Dénivelé	$h = 510 \text{ m}$		

Inertie* : Cette inertie tient compte de l'inertie du moteur et du réducteur et de deux volants d'inertie de diamètre 870 mm et d'épaisseur 200 mm.

Hypothèse : compte tenu des masses des éléments du système, l'inertie de l'ensemble des poulies est négligeable pour cette étude.

L'action du vent sur la surface latérale d'une cabine est modélisable par une pression uniforme p :

$$p = 1/2 \rho V_a^2 \text{ avec } p \text{ en pascal}$$

ρ : masse volumique de l'air $= 1.3 \text{ kg/m}^3$,

V_a module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s

Compte tenu de la longueur des portées, la raideur en torsion d'un brin de câble est négligeable.

Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prend comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir *Fig. 1 Ligne totale*).

Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec de coefficient de frottement $f = 0.03$.

Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 KW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble) dans la situation étudiée ci dessous.

On étudie la situation suivante (qui correspond au cas le plus défavorable) :

Redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de 0.15m/s^2 . On se place à l'instant où la vitesse de 7.2m/s va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30 \text{ m/s}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

QUESTIONS

Documents à consulter : Fig. 1 Ligne totale et tableau des caractéristiques de la page 2

- Q-1 **Déterminer** l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{cT} , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c , M_p , μ , L , V , D_p et I_M . L'application numérique donne : $E_{cT} = 6.7 \cdot 10^6 \text{ J}$ soit $E_{cT} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ V}^2$
- Q-2 **Déterminer** la puissance galiléenne des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p , V , h , g et L . L'application numérique donne $P_p = - 3.6 \cdot 10^5 \text{ W}$ pour la situation étudiée.
- Q-3 Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, **déterminer** la puissance galiléenne des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ , S_f , V , V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$. L'application numérique donne $P_v = - 2.2 \cdot 10^5 \text{ W}$ pour la situation étudiée.
- Q-4 **En déduire** une estimation de la puissance galiléenne nécessaire pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW , **commentez** vos résultats par rapport à cette valeur.

Corrigé Mines 2003-04

Q1] on néglige {

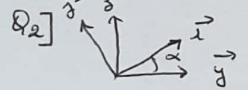
- la longueur des câbles dans les gares;
- l'inertie de certains solides tournants.

$$E_{CT} = 4(E_c \text{ câbles}) + 16(E_c \text{ cabines}) + 8(E_c \text{ personnes}) + E_{c \text{ poulie motrice}}$$

$$E_{CT} = 4\left(\frac{1}{2} M_{\text{câble}} \cdot v^2\right) + \left(\frac{1}{2} M_c v^2\right) \cdot 16 + 8\left(\frac{1}{2} M_p v^2\right) + \frac{1}{2} I_m \omega^2$$

d'où: $v = \frac{D_p}{2} \cdot \omega$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} [4 L_p + 16 M_c + 8 M_p + I_m \left(\frac{2}{D_p}\right)^2] v^2$$



On a: 8 cabines montantes et 8 cabines descendantes

donc: $P(g \rightarrow \text{cabines}/o) = 0$

2 brins montants et 2 brins descendants

donc: $P(g \rightarrow \text{câbles}/o) = 0$

$$P(g \rightarrow \text{Passagers}/o) = - \frac{M_{\text{Totale Passagers}}}{\sin \alpha} \cdot v \cdot g \cdot \vec{i} \cdot \vec{z}$$

donc:
$$P_p = - \frac{M_{\text{Totale Passagers}} \cdot v \cdot g \cdot \sin \alpha}{8 \cdot M_p \cdot \frac{h}{L}}$$

$$P_p = - 8 M_p \cdot v \cdot g \cdot \frac{h}{L}$$

Q3]
$$\vec{v}_a(\text{montée}) = -v_e \vec{i} - v \vec{i} = -(v_e + v) \vec{i}$$

$$\vec{v}_a(\text{descente}) = -v_e \vec{i} + v \vec{i} = (v - v_e) \vec{i}$$

(1/1)

$$P(\text{vent} \rightarrow \text{cab. montée}/o) = 8 \left[-\frac{1}{2} \rho S_f \cdot v_{a \text{ montée}}^2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{i} \right]$$

$$= -4 \rho S_f (v_e + v)^2 \cdot v \cdot \cos \alpha$$

$$P(\text{vent} \rightarrow \text{cab. descente}/o) = 4 \rho S_f (v - v_e)^2 \cdot v \cdot \cos \alpha$$

d'où:
$$P(\text{vent} \rightarrow 16 \text{ cabines}/o) = -16 \rho S_f \cdot v_e \cdot v^2 \cdot \cos \alpha$$

Q4]
$$\frac{dE_{CT}}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

$$1,3 \cdot 10^5 \cdot v \cdot \dot{v} = P_p + P_{\text{vent}} - P_{\text{perdue}} + P_{\text{motrice}}$$

$$P_{\text{motrice}} = 1,3 \cdot 10^5 \cdot v \cdot \dot{v} - P_p - P_v + P_{\text{perdue}}$$

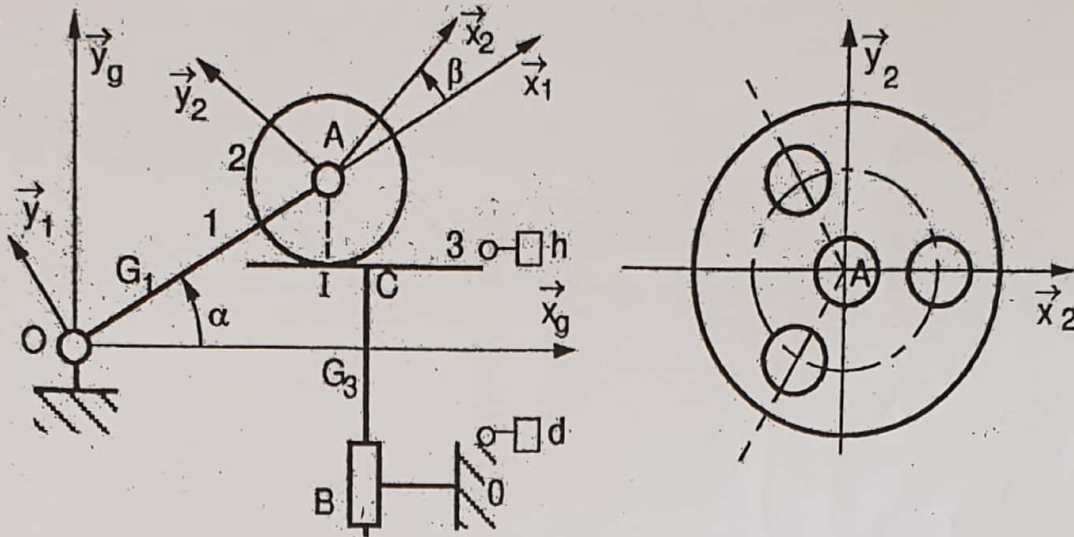
A.N:
$$P_{\text{motrice}} = 12,608 \cdot 10^5 \text{ W} < 15,6 \cdot 10^5$$

 Puissance utile Puissance installée

Mécanisme d'ouverture automatique

Le schéma ci-dessous représente, d'une manière simplifiée, une partie d'un mécanisme d'ouverture automatique.

Description de la partie opérative



- Au bâti 0 est associé le repère galiléen $R(O, \bar{x}_g, \bar{y}_g, \bar{z}_g)$. $\vec{g} = -g\bar{y}_g$ ($g > 0$). On pose : $O\vec{B} = b\bar{x}_g + c\bar{y}_g$.
- Le bras 1, de masse m_1 et de centre d'inertie G_1 , est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (O, \bar{z}_g) .
Le repère $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_g)$ est lié à 1. On pose : $O\vec{A} = a\bar{x}_1$, $\alpha = (\bar{x}_g, \bar{x}_1)$, $O\vec{G}_1 = e\bar{x}_1$
On note I, le moment d'inertie de 1 par rapport à l'axe (O, \bar{z}_g) .
- La roulette 2 est assimilée à un disque homogène de masse m_2 et de rayon $5r$. Elle est percée de quatre trous de rayon r , l'un centré en A et les trois autres également répartis sur un cercle de rayon $3r$. Elle est liée au bras 1 par une liaison pivot parfaite d'axe (A, \bar{z}_g) . $R_2(A, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_g)$ est lié à 2, et on pose : $\beta = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

On pose la matrice d'inertie de 2 au point A : $\bar{I}(A, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2}$

Un ressort de torsion est logé entre 1 et 2 ; de raideur k , libre à $\beta = 0$.

- Le plateau 3, de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 , est lié au bâti par une liaison glissière parfaite de direction (\bar{y}_g) . On pose : $\overline{BC} = \lambda \cdot \bar{y}_g$, $\overline{CG}_3 = d \cdot \bar{y}_g$ (λ : variable)

La roulette 2 est en contact en I avec le plateau 3. Les actions mécaniques extérieures sur le système sont : (autres que le poids)

$$\{T(e \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} Y \cdot \bar{y}_g \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_B \quad \text{et} \quad \{T(M_{01} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ N \cdot \bar{z}_g \end{Bmatrix}$$

On suppose Y et N connus en fonction du temps. On choisit d'étudier le système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

- 1 - Tracer le schéma d'analyse du mécanisme.
- 2 - Calculer l'énergie cinétique du système Σ dans son mouvement par rapport à R ;
- 3 - Calculer les puissances intérieures et extérieures au système ;
- 4 - Déterminer l'équation issue du théorème de l'énergie cinétique appliquée à $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

Déploiement d'un satellite

Afin d'étudier le déploiement des bras d'un satellite, bras destinés au contrôle de l'autorotation, on emploie au laboratoire le modèle expérimental défini sur la figure.

Soit $R_0(O; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ un repère lié au laboratoire (S_0), supposé galiléen, Z_0 étant vertical ascendant.

Le corps du satellite (S_1) est en liaison pivot parfaite d'axe $(O; Z_0)$ avec (S_0). On associe à (S_1) le repère $R_1(O_1; \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$. La position de (S_1) par rapport à (S_0) est repérée par le paramètre $\psi = (\vec{X}_0; \vec{X}_1) = (\vec{Y}_0; \vec{Y}_1)$ ($\vec{Z}_0 = \vec{Z}_1$)

On notera m_1 la masse du solide (S_1). R_1 est repère principal d'inertie et on notera A_1, B_1, C_1 les moments principaux d'inertie.

Le bras du satellite (S_2) est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_2; Y_1)$ avec (S_1), $O_1O_2 = a_2\vec{X}_1$. On associe à (S_2) le repère $R_2(G_2; \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$. La position de (S_2) par rapport à (S_1) est repérée par le paramètre $\theta_2 = (\vec{Z}_1; \vec{Z}_2)$. ($Y_1 = Y_2$)

On associe à la liaison pivot un frottement visqueux modélisé par un couple $\vec{C}_{12} = -v\dot{\theta}_2\vec{Y}_1$.

Entre (S_1) et (S_2) on place un ressort de torsion de raideur k_2 et un moteur délivrant un couple $\vec{C}_{m2} = C_{m2}\vec{Y}_1$

G_2 est le centre d'inertie de (S_2) défini par $O_2G_2 = b_2\vec{Z}_2$. On notera m_2 la masse du solide (S_2). R_2 est repère principal d'inertie et on notera A_2, B_2, C_2 les moments principaux d'inertie.

Le bras du satellite (S_3) est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_3; Y_1)$ avec (S_1), $O_1O_3 = -a_3\vec{X}_1$. On associe à (S_3) le repère $R_3(G_3; \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$. La position de (S_3) par rapport à (S_1) est repérée par le paramètre $\theta_3 = (\vec{Z}_1; \vec{Z}_3)$. ($Y_1 = Y_3$)

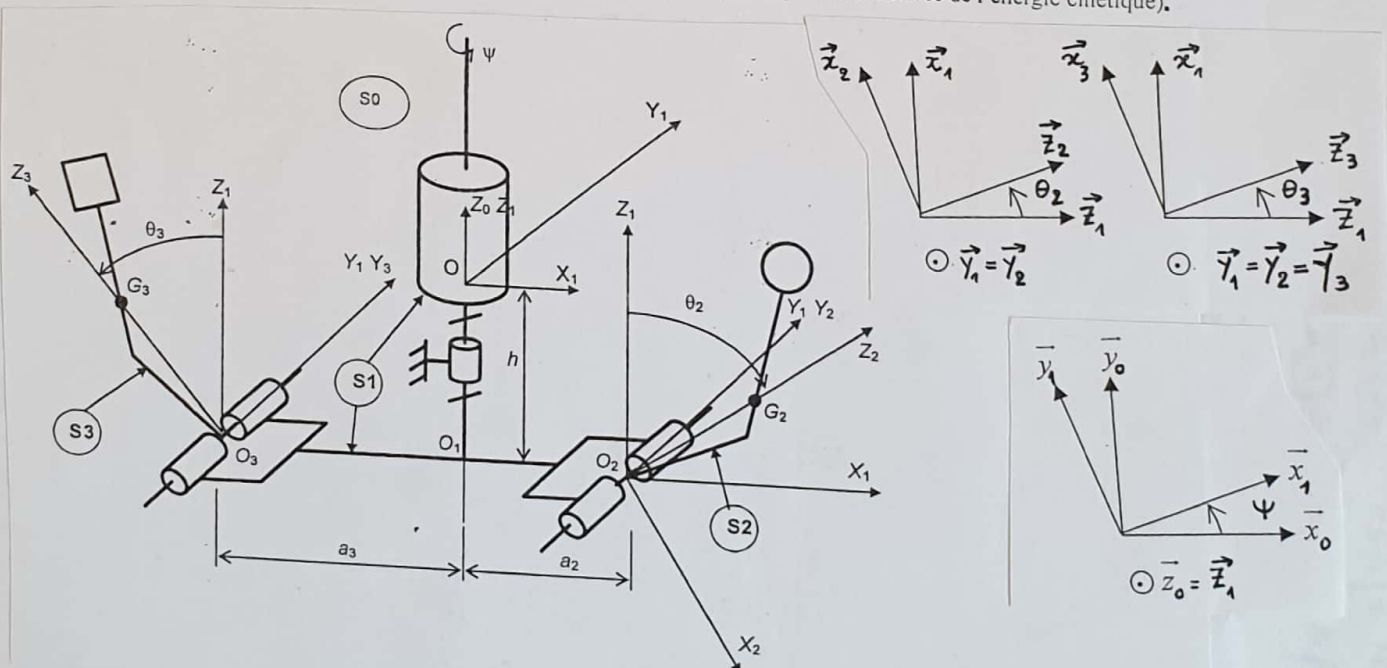
On associe à la liaison pivot un frottement visqueux modélisé par un couple $\vec{C}_{13} = -v\dot{\theta}_3\vec{Y}_1$.

Entre (S_1) et (S_3) on place un ressort de torsion de raideur k_3 et un moteur délivrant un couple $\vec{C}_{m3} = C_{m3}\vec{Y}_1$

G_3 est le centre d'inertie de (S_3) défini par $O_3G_3 = b_3\vec{Z}_3$. On notera m_3 la masse du solide (S_3). R_3 est repère principal d'inertie et on notera A_3, B_3, C_3 les moments principaux d'inertie.

Soit (Σ) le système constitué des trois solides (S_1), (S_2), et (S_3).

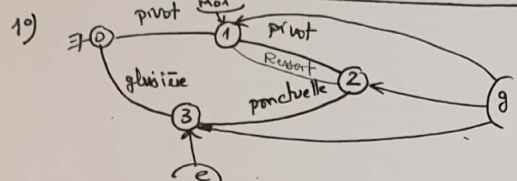
- 1 - Tracer le schéma d'analyse du mécanisme.
- 2 - Calculer l'énergie cinétique de Σ dans son mouvement par rapport à R_0 .
- 3 - Calculer la puissance de toutes les actions mécaniques extérieures à Σ par rapport à R_0 .
- 4 - Calculer la puissance de toutes les actions mécaniques intérieures à Σ : $P(\text{int } \Sigma)$.
- 5 - Ecrire le théorème de l'énergie cinétique à Σ dans son mouvement par rapport à 0 et déduire l'équation qui en découle. (Ne pas expliciter la dérivée de l'énergie cinétique).



T.D.

CORRIGÉ

MECANISME D'OUVERTURE AUTOMATIQUE



2°) $T(I/R_0) = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\lambda}^2 + T(2/R_0)$

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\ A \dot{\alpha} \vec{y}_1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} m_2 a \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}(A, 2/R_0) \end{matrix} \right\}$$

$T(I/R_0) = \frac{1}{2} [I \dot{\alpha}^2 + m_3 \dot{\lambda}^2 + m_2 a^2 \dot{\alpha}^2 + C_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2]$

3°) * $P(I \rightarrow I/R_0) = P(M_{01} \rightarrow 1/R_0) + P(O \rightarrow 1/R_0) + P(O \rightarrow 3/R_0) + P(e \rightarrow 3/R_0) + P(g \rightarrow 2/R_0)$

$$= N \dot{\alpha} + \gamma \dot{\lambda} - \frac{d}{dt} \underbrace{V(g \rightarrow I/R_0)}_{-m_1 \vec{g} \cdot \vec{OG}_1 - m_2 \vec{g} \cdot \vec{OG}_2 - m_3 \vec{g} \cdot \vec{BG}_3}$$

$$g (m_1 \vec{y}_g \cdot e \vec{x}_1 + m_2 \vec{y}_g \cdot a \vec{x}_1 + m_3 \vec{y}_g \cdot (A+d) \vec{x}_g)$$

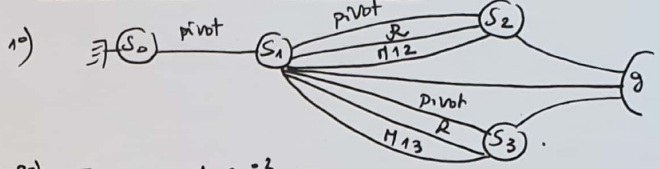
Donc: $P(I \rightarrow I/R_0) = N \dot{\alpha} + \gamma \dot{\lambda} - g [\dot{\alpha} (m_1 e + m_2 a) \cos \alpha + m_3 \dot{\lambda}]$

* $P(int.) = \dot{\alpha} P(1 \rightarrow 2) = - \frac{d}{dt} V(1 \rightarrow 2) = - \frac{d}{dt} \left[\frac{k}{2} \beta^2 \right] = -k \beta \dot{\beta}$

1

4°) $I \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m_3 \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + m_2 a^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + C_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) = N \dot{\alpha} + \gamma \dot{\lambda} - g [\dot{\alpha} (m_1 e + m_2 a) \cos \alpha + m_3 \dot{\lambda}] - k \beta \dot{\beta}$

DEPLOIEMENT D'UN SATELLITE



2°) $T(I/R_0) = \frac{1}{2} C_1 \dot{\psi}^2 + T(S_2/R_0) + T(S_3/R_0)$

$$\frac{1}{2} \left\{ \vec{v}(S_2/R_0) \right\} \cdot \left\{ \vec{G}(S_2/R_0) \right\}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \vec{r}(S_2/O) \\ \vec{v}(G_2/O) \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} m_2 \vec{v}(G_2/O) \\ \vec{\sigma}(G_2, 2/O) \end{matrix} \right\}_{G_2}$$

$$\vec{r}(2/O) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta}_2 \vec{y}_1 = \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + \dot{\psi} (\cos \theta_2 \vec{x}_2 - \sin \theta_2 \vec{z}_2)$$

$$\vec{v}(G_2/O) = \frac{d}{dt} (OG_2)_{R_0} = b_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + (A_2 + b_2 \sin \theta_2) \dot{\psi} \vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}(G_2, 2/O) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi} \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$= -A_2 \dot{\psi} \sin \theta_2 \vec{x}_2 + B_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + C_2 \dot{\psi} \cos \theta_2 \vec{z}_2$$

$$\vec{G}(G_2, 2/O) \cdot \vec{r}(2/O) = B_2 \dot{\theta}_2^2 + (A_2 \sin^2 \theta_2 + C_2 \cos^2 \theta_2) \dot{\psi}^2$$

$$T(2/R_0) = \frac{m_2}{2} [(A_2 + b_2 \sin \theta_2)^2 \dot{\psi}^2 + b_2^2 \dot{\theta}_2^2] +$$

$$\frac{1}{2} [B_2 \dot{\theta}_2^2 + (A_2 \sin^2 \theta_2 + C_2 \cos^2 \theta_2) \dot{\psi}^2]$$

et $T(3/R_0) = \frac{m_3}{2} [(A_3 + b_3 \sin \theta_3)^2 \dot{\psi}^2 + b_3^2 \dot{\theta}_3^2] + \frac{1}{2} [B_3 \dot{\theta}_3^2 + (A_3 \sin^2 \theta_3 + C_3 \cos^2 \theta_3) \dot{\psi}^2]$

D'où: $T(I/R_0) = \frac{1}{2} C_1 \dot{\varphi}^2 + T(2/R_0) + T(3/R_0)$.

3°) $P(\bar{I} \rightarrow I/R_0) = P(\vec{0}_0 \xrightarrow{P.V} S_1/R_0) + \underbrace{P(q \rightarrow I/R_0)}_{-\frac{d}{dt} \underbrace{V(q \rightarrow I/R_0)}_{-m_2 \vec{g} \cdot \vec{O}_1 \vec{G}_2 - m_3 \vec{g} \cdot \vec{O}_1 \vec{G}_3}}$

$P(\bar{I} \rightarrow I/R_0) = g [m_2 b_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_3 b_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3]$

4°) $P_{int} = -v \dot{\theta}_2^2 + C_m \dot{\theta}_2 - k_2 \theta_2 \dot{\theta}_2 - v \dot{\theta}_3^2 + C_m \cdot \dot{\theta}_3 - k_3 \theta_3 \dot{\theta}_3$

5°) $\frac{d}{dt} T(I/R_0) = P_{ext} + P_{int}$

Testeur de Centrale Inertielle

Présentation

Le système étudié ici est destiné à effectuer des tests dynamiques et statiques sur des équipements inertiels embarqués dans tout type de véhicules (terrestres, marins, aériens et spatial).

Ce testeur est un robot constitué d'une partie opérative munie de deux axes comme représenté sur la figure 1 ci-dessous.

On peut voir le premier axe toujours horizontal (l'axe Thêta) actionné par deux motoréducteurs M1 et M1' montés entre 0 et 1, et le deuxième axe normal au plan du plateau 2 (l'axe Phi) actionné par un motoréducteur M2 monté entre 1 et 2 (la centrale à tester 3 sera fixée sur 2).

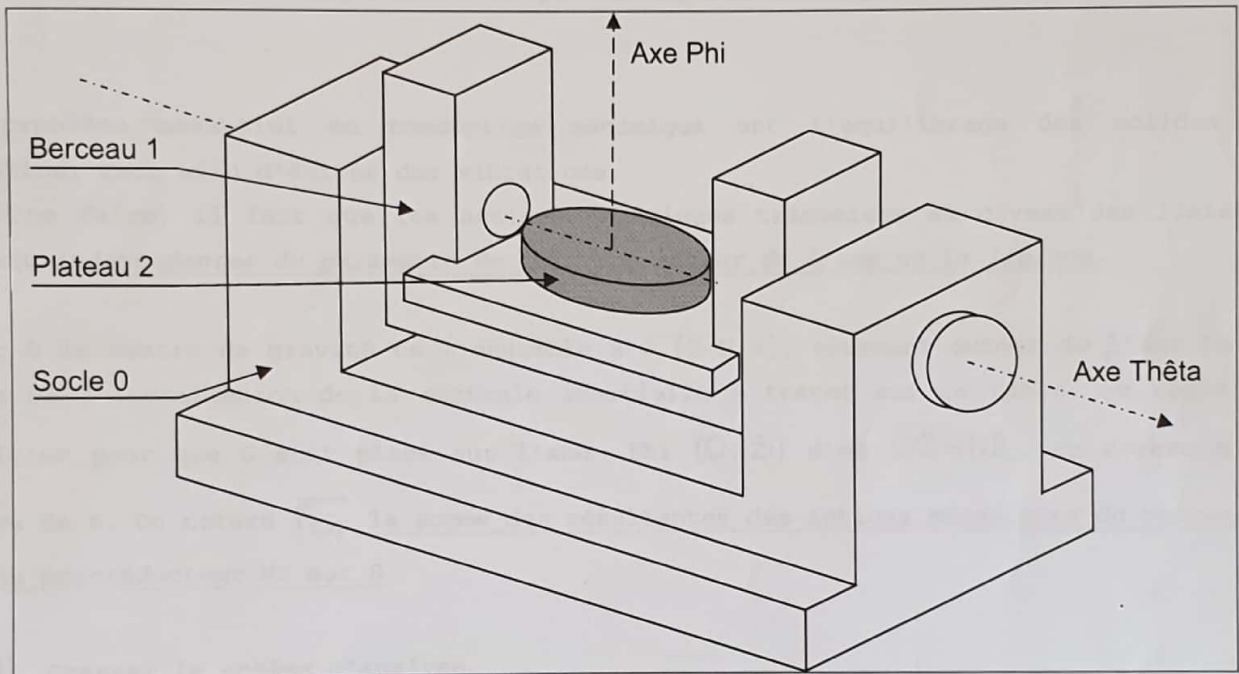


Figure 1 : la partie opérative du testeur

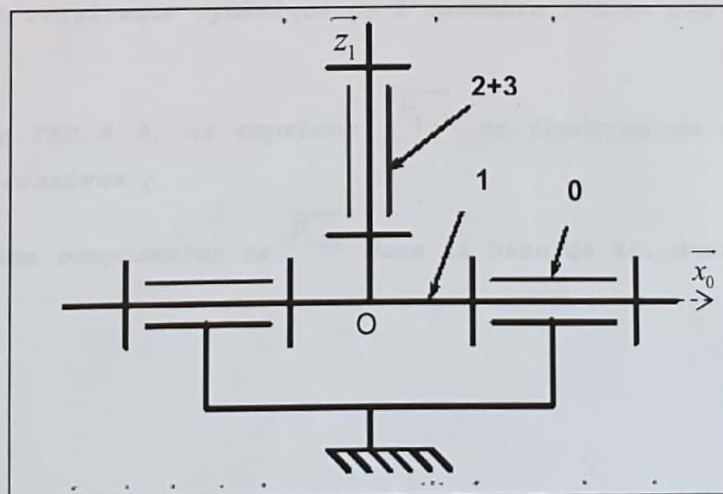


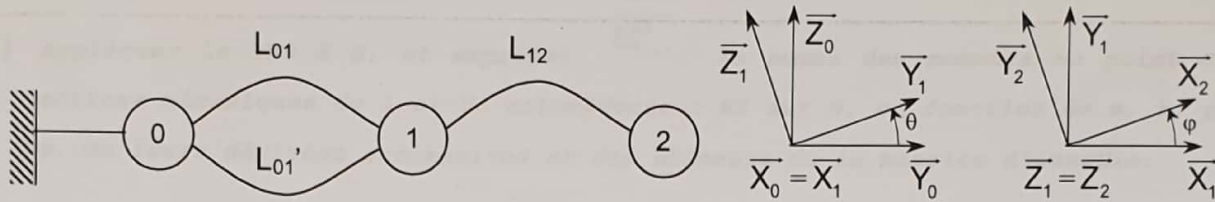
Figure 2 : schéma cinématique de la partie opérative du testeur

Le référentiel $R_0(O; \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ lié au socle 0 est considéré galiléen avec \bar{z}_0 axe vertical ascendant.

Le berceau 1 est relié au socle par deux liaisons pivot coaxiales orientées selon l'axe Θ horizontal ($O; \bar{x}_0$). On associe le repère $R_1(O; \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ au berceau 1.

Le plateau 2 est en liaison pivot avec le berceau 1 selon l'axe Φ ($O; \bar{z}_1$). Le repère $R_2(O; \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ est associé à l'ensemble S constitué par 2 et 3.

Les figures 3 ci-dessous définissent le graphe des liaisons et les paramètres de positionnement angulaire entre les différentes bases.



Figures 3 : Graphe et figures de calculs

Un problème essentiel en conception mécanique est l'équilibrage des solides en rotation. Ceci afin d'éviter des vibrations.

Pour ce faire, il faut que les actions mécaniques transmises au niveau des liaisons soient indépendantes du paramètre de rotation autour de l'axe de la liaison.

Soit G le centre de gravité de l'ensemble $S = \{2 \cup 3\}$, tournant autour de l'axe Φ : lors de l'installation de la centrale inertielle à tester sur la table, on règle sa position pour que G soit placé sur l'axe Φ ($O; \bar{z}_1$) d'où $\overline{OG} = h \cdot \bar{z}_1$. On notera m la masse de S. On notera $\overline{F}_{1 \rightarrow 2}$ la somme des résultantes des actions mécaniques du berceau 1 et du motoréducteur M2 sur S.

Q1) Dresser le schéma d'analyse.

Q2) Calculer la résultante dynamique de l'ensemble S dans son mouvement par rapport à R_0 .

Q3) Appliquer le TRD à S, et exprimer $\overline{F}_{1 \rightarrow 2}$ en fonction de m, h, g, θ et de ses dérivées successives ;

Q4) Expliciter les composantes de $\overline{F}_{1 \rightarrow 2}$ dans la base de R_1 . Sont elles dépendantes de ϕ ?

L'ensemble S peut être modélisé comme un solide de révolution d'où la forme de sa matrice d'inertie :

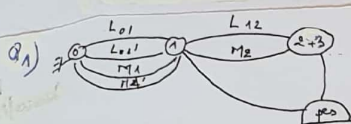
$$[I(O,S)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(O, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_1)}$$

- Q5) Justifier que la matrice d'inertie de l'ensemble S exprimée au point O reste la même dans la base $(\bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$.
- Q6) Calculer le moment dynamique de l'ensemble S dans son mouvement par rapport à R_0 au point O.
- Q7) Appliquer le TMD à S, et exprimer $\overline{M_{1 \rightarrow 2}^O}$, la somme des moments au point O des actions mécaniques de 1 et du motoréducteur M2 sur S, en fonction de m, h, g, θ, φ , de leurs dérivées successives et des éléments de la matrice d'inertie.
- Q8) Expliciter les composantes de $\overline{M_{1 \rightarrow 2}^O}$ dans la base de R_1 .
- Q9) Expliquer pourquoi des vitesses de rotations constantes de l'axe Phi n'engendrent pas de variations périodiques sur $\overline{M_{1 \rightarrow 2}^O}$.
- Q10) L'axe Phi est-il équilibré ?

Soit G_1 le centre de gravité du berceau 1 tel que $\overline{OG_1} = h_1 \cdot \bar{z}_1$ et m_1 sa masse. On notera $\overline{F_{0 \rightarrow 1}}$ la somme des résultantes des actions mécaniques du socle 0 et du motoréducteur M1 sur le berceau 1 au niveau du premier palier et $\overline{F'_{0 \rightarrow 1}}$ la somme des résultantes des actions mécaniques du socle 0 et du motoréducteur M1' sur le berceau 1 au niveau du second.

- Q11) Calculer la résultante dynamique du berceau 1 dans son mouvement par rapport à R_0 .
- Q12) Appliquer le TRD à 1, et exprimer $\overline{F_{0 \rightarrow 1}} + \overline{F'_{0 \rightarrow 1}}$, en fonction de $m_1, m, h_1, h, g, \theta$ et de ses dérivées successives ;
- Q13) Expliciter les composantes de $\overline{F_{0 \rightarrow 1}} + \overline{F'_{0 \rightarrow 1}}$, dans la base de R_1 ;
- Q14) Expliquer pourquoi la rotation de l'axe Thêta à vitesse constante engendre une variation périodique sur $\overline{F_{0 \rightarrow 1}} + \overline{F'_{0 \rightarrow 1}}$. Conclure.

Éléments de CORRIGÉ
DU T.D.



Q1] $\vec{R}_d(s) = m \cdot \ddot{\Gamma}(G/R_0) = m \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\Gamma}(G/R_0))_{R_0} = m \cdot \frac{d}{dt} [-h\dot{\theta} \vec{y}_2] = -mh [\ddot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2 \vec{z}_1]$

Q2] TRD: $\vec{F}_{12} + m\vec{g} = \vec{R}_d(s)$

$\vec{F}_{12} = \vec{R}_d(s) - m\vec{g} = -m [h(\ddot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2 \vec{z}_1) - g \vec{z}_0]$
 ↓ $g \vec{z}_0 = g \sin \theta \vec{y}_1 + g \cos \theta \vec{z}_1$

Q3] $\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} F_{12x} = 0 \\ F_{12y} = -mh\ddot{\theta} + mg \sin \theta \\ F_{12z} = -mh\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \end{pmatrix}_{R_1}$

F_{12x} et F_{12z} ne dépendent pas de φ .

Q4] L'axe de révolution de (S) est (O, \vec{z}_0) donc $\vec{\Gamma}(q,s)$ reste variable de $(-1, 1) \vec{z}_0$ et en particulier $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$.

Q5] $\ddot{\delta}(O, S/R_0) = \frac{d}{dt} \dot{\Gamma}(O, S/R_0)_{R_0} + m \cdot \dot{\Gamma}(R_0) \wedge \dot{\Gamma}(G/R_0)$
 $\vec{\Gamma}(q,s) = \vec{\Omega}(1/R_0)$ et $\dot{\Gamma}(G/R_0) = \dot{\theta} \vec{x}_0 + \dot{\varphi} \vec{z}_1$

$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_1}$

$\ddot{\delta}(O, S/R_0) = A\ddot{\theta} \vec{x}_0 + C\ddot{\varphi} \vec{z}_1 - C\dot{\theta}\dot{\varphi} \vec{y}_1$

Q6] $\ddot{\delta}(q,s/R_0) = \ddot{m}_b(C \rightarrow S) = \vec{M}_{1 \rightarrow 2}^0 + \vec{M}_{ps \rightarrow 2}^0$

donc: $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^0 = \ddot{\delta}(q,s/R_0) - \vec{M}_{ps \rightarrow 2}^0$
 $= \underbrace{OC \wedge (m g \vec{z}_0)}_{-mgh \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_0} - \underbrace{mgh \sin \theta \vec{z}_0}_{mgh \sin \theta \vec{x}_0}$

d'où: $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^0 = (A\ddot{\theta} + mgh \sin \theta) \vec{x}_0 + C\ddot{\varphi} \vec{z}_1 - C\dot{\theta}\dot{\varphi} \vec{y}_1$

Q7] $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^0 = \begin{pmatrix} A\ddot{\theta} + mgh \sin \theta = \vec{M}_{12}^x \\ -C\dot{\theta}\dot{\varphi} = \vec{M}_{12}^y \\ C\ddot{\varphi} = \vec{M}_{12}^z \end{pmatrix}_{R_1}$

Q8] $\dot{\varphi} = \text{cte} \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$ donc $\vec{M}_{12}^z = 0$
 Q9] ouï, car M_{12}^x, M_{12}^y et M_{12}^z ne dépendent ni de φ ni de θ .

Q10] $\vec{R}_d(1/0) = m_1 \cdot \ddot{\Gamma}(G_1/R_0) = -m_1 \ddot{\theta} [\dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2 \vec{z}_1]$

Q11] TRD $\vec{E}1/R_0$: $\vec{R}_d(1/0) = \vec{R}(\vec{T} \rightarrow 1) = \vec{F}_{0 \rightarrow 1} + \vec{F}_{0 \rightarrow 1'} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{ps \rightarrow 1}$

donc: $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} + \vec{F}_{0 \rightarrow 1'} = \vec{R}_d(1/0) + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{R}(\vec{1} \rightarrow 1)$

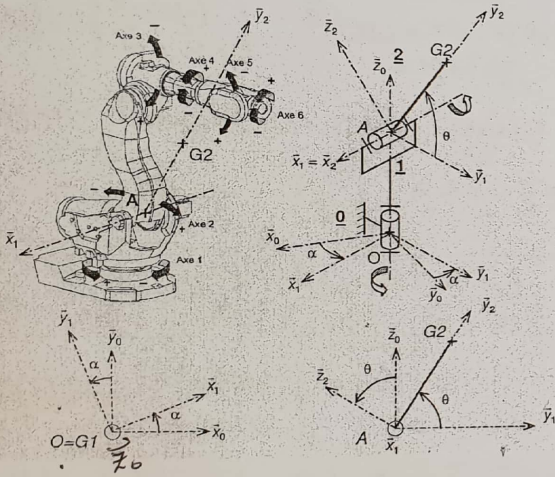
$\vec{F}_{0 \rightarrow 1} + \vec{F}_{0 \rightarrow 1'} = -m_1 \ddot{\theta} [\dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2 \vec{z}_1] - m \ddot{\theta} [\dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2 \vec{z}_1] - g \vec{z}_0 + m_1 g \vec{z}_0$
 ↓ $g \vec{z}_0 = g \sin \theta \vec{y}_1 + g \cos \theta \vec{z}_1$

Q12] $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} + \vec{F}_{0 \rightarrow 1'} = \begin{pmatrix} F_{01'x} = 0 \\ F_{01'y} = -m_1 \dot{\theta} \ddot{\theta} - m \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg \sin \theta + m_1 g \sin \theta \\ F_{01'z} = -m_1 \dot{\theta}^2 - m \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + m_1 g \cos \theta \end{pmatrix}$

Q13] $\dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{01'x} = 0 \\ F_{01'y} = (m+m_1)g \sin \theta \rightarrow \text{variable} \\ F_{01'z} = (m+m_1)g \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \rightarrow \text{variable} \end{pmatrix}$

Robot Manipulateur articulé Couple moteur dynamique

On considère un robot manipulateur ABB IRB 7600 articulé à 6 axes comme celui ci-dessous. On souhaite déterminer le couple moteur à exercer sur l'axe 2 (orienté par \vec{x}_1) pour une configuration particulière où les axes 3, 4, 5 et 6 sont verrouillés (bloqués). Configuration pour laquelle on suppose donc que le robot peut se réduire cinématiquement à deux solides dont on suppose connus les centres de gravité et les opérateurs d'inertie respectifs. En particulier, on remarquera la symétrie du robot par rapport au plan (\vec{y}_1, \vec{z}_0) ou (\vec{y}_2, \vec{z}_2) .



On pose $\vec{OA} = a\vec{z}_0$ et $\vec{AG2} = b\vec{y}_2$, et on donne l'opérateur d'inertie de (2) en A exprimé dans la base $(B2)$:

$$\overline{I}_A(2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Le bilan des AM extérieures pour (2) donne :

- l'action inconnue du moteur : $\left\{ \mathcal{J}_{m/2} \right\}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_m \vec{x}_1 \end{bmatrix}$
- l'action de la pesanteur : $\left\{ \mathcal{J}_{pss/2} \right\}_{G2} = \begin{bmatrix} \vec{P}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -M_2 g \vec{z}_0$
- l'action de la liaison pivot d'axe A \vec{x}_1 : $\left\{ \mathcal{J}_{11/2} \right\}_A = \begin{bmatrix} A_{11/2} \\ \vec{M}_{A1/2} \\ M_{A1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Travail demandé

- 1- Définir l'équation à écrire pour exprimer le seul couple moteur C_m .
- 2- Déterminer au point A les torseurs cinématique et cinétique de (2) par rapport à (0).
- 3- Déterminer au point A le torseur dynamique de (2) par rapport à (0).
- 4- En écrivant l'équation définie question 1, donner l'expression de C_m en fonction des paramètres α, θ et de leurs dérivées, des longueurs et données d'inertie (A_2, B_2, C_2, D_2 , et M_2).

ROBOT MANIPULATEUR ARTICULÉ - CORRIGÉ

1°] T.M.D appliqué à 2/0 au pt. A en proj. sur \vec{x}_1 :

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{S}(A, 2/0) = \vec{m}(A, \vec{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_1$$

$$2^\circ] * \left\{ \vec{v}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(2/0) \\ \vec{v}(A \in 2/0) \end{array} \right\}_A \quad \vec{v}(2/0) = \vec{v}(2/1) + \vec{v}(1/0) = \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\vec{v}(A \in 2/0) = \left. \frac{d}{dt} \vec{OA} \right|_R = \vec{0}$$

$$\text{donc: } \left\{ \vec{v}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$* \left\{ \vec{G}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_C(2/0) \\ \vec{v}(A, 2/0) \end{array} \right\}_A = \vec{R}_C(2/0) = M_2 \cdot \vec{v}(G_2/0) = M_2 b (\dot{\theta} \vec{z}_2 - \dot{\alpha} \cos \theta \vec{x}_1)$$

$$\vec{v}(A, 2/0) = \vec{I}(A, 2) \cdot \vec{v}(2/0) + M_2 \vec{AG}_2 \wedge \vec{v}(A \in 2/0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 \dot{\theta} \vec{x}_1 - D_2 \dot{\alpha} \vec{y}_1 + C_2 \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\text{donc: } \left\{ \vec{G}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 b (\dot{\theta} \vec{z}_2 - \dot{\alpha} \cos \theta \vec{x}_1) \\ A_2 \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} (C_2 \vec{z}_0 - D_2 \vec{y}_1) \end{array} \right\}_A$$

$$3^\circ] \left\{ \vec{D}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(2/0) \\ \vec{S}(A, 2/0) \end{array} \right\}_A$$

$$\vec{R}_d(2/0) = \left. \frac{d}{dt} \vec{R}_C(2/0) \right|_R = M_2 \cdot b \cdot \left. \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \vec{z}_2 - \dot{\alpha} \cos \theta \vec{x}_1) \right|_R = M_2 \cdot b \left(\dot{\theta} \vec{z}_2 + \dot{\theta} \frac{d\vec{z}_2}{dt} - \dot{\alpha} \cos \theta \vec{x}_1 - \dot{\alpha} (-\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \frac{d\vec{x}_1}{dt}) \right)$$

$$\text{on a: } \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_R = \vec{v}(2/1) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0) \wedge \vec{z}_2 = -\dot{\theta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \sin \theta \vec{x}_1$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_R = \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\text{donc: } \vec{R}_d(2/0) = M_2 \cdot b [\dot{\theta} \vec{z}_2 + \dot{\theta} (\dot{\alpha} \sin \theta \vec{x}_1 - \dot{\theta} \vec{y}_2) - (\dot{\alpha} - \dot{\alpha} \cos \theta) \vec{x}_1 - \dot{\alpha}^2 \cos \theta \vec{y}_1]$$

$$\vec{S}(A, 2/0) = \left. \frac{d}{dt} \vec{v}(A, 2/0) \right|_{t_0} = A_2 (\ddot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \ddot{\theta} \vec{y}_1) - D_2 (\ddot{\alpha} \vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1) + C_2 \ddot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\text{D'où: } \left\{ \vec{D}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \cdot b [(2 \dot{\theta} \dot{\alpha} \sin \theta - \dot{\alpha}^2) \vec{x}_1 - \dot{\alpha}^2 \cos \theta \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + \ddot{\theta} \vec{z}_2] \\ (A_2 \ddot{\theta} + D_2 \dot{\alpha}^2) \vec{x}_1 + (A_2 \dot{\theta} \dot{\alpha} - D_2 \ddot{\alpha}) \vec{y}_1 + C_2 \ddot{\alpha} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_A$$

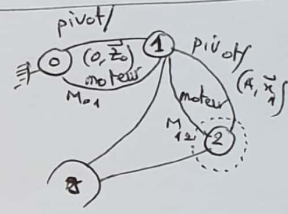
$$4^\circ] \vec{S}(A, 2/0) \cdot \vec{x}_1 = \vec{m}(A, \vec{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_1 = C_m + \vec{x}_1 \cdot (G_2 A M_2 g \vec{z}_0)$$

donc:

$$C_m = \vec{x}_1 \cdot \vec{v}(A, 2/0) + \vec{x}_1 \cdot (G_2 A M_2 g \vec{z}_0)$$

$$C_m = A_2 \cdot \ddot{\theta} + D_2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \vec{x}_1 \cdot (-b \vec{y}_2 \wedge M_2 \cdot g \vec{z}_0)$$

$$\text{D'où: } \boxed{C_m = A_2 \cdot \ddot{\theta} + D_2 \cdot \dot{\alpha}^2 - b M_2 \cdot g \cdot \cos \theta}$$



BANC D'ESSAI (CCP - PSI - 2010)

4.3. Dimensionnement du moteur hydraulique

L'objectif de cette partie est de déterminer la vitesse maximale du moteur du chariot arrière ainsi que le couple moteur nécessaire afin de pré-dimensionner celui-ci.

Un schéma cinématique simplifié du chariot arrière, ainsi que les grandeurs cinématiques et cinétiques, sont donnés Figure 6 (page 10/20).

La chaîne de puissance comporte un moteur hydraulique, un réducteur roue et vis sans fin, un réducteur à engrenages parallèles et un système pignon-crémaillère.

Le guidage du chariot est modélisé par une glissière.

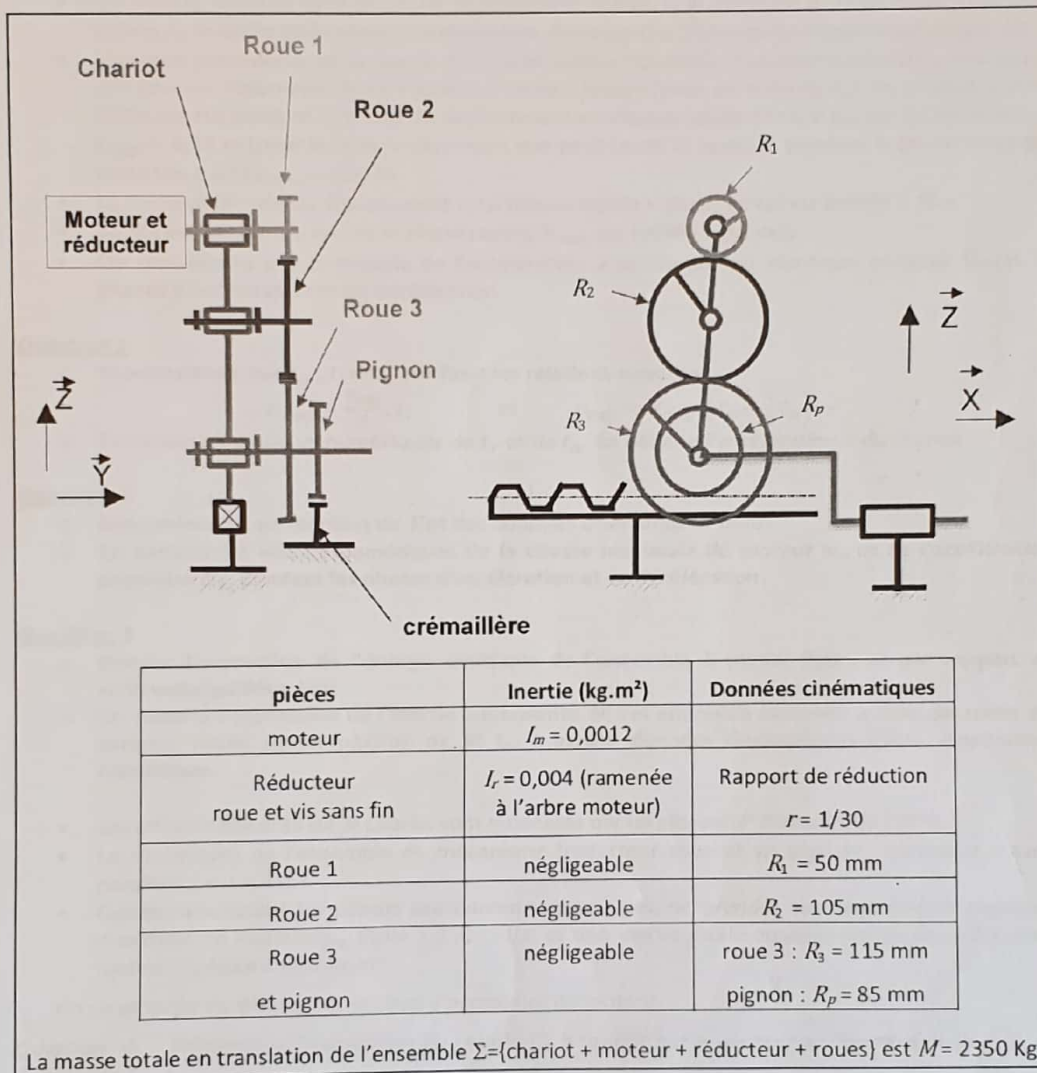
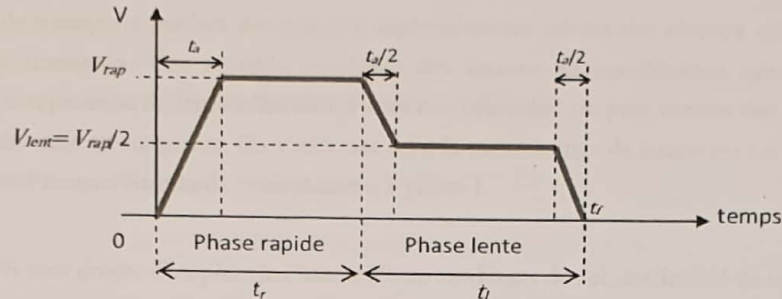


Figure 6

Référence	Cylindrée [cm ³]	N max [tours/min]	Couple max [Nm]	Puissance [kw]	Poids [kg]
HDMF11-05	4,88	12 000	7,8	13	5
HDMF11-14	14,3	10 000	22,7	26	9
HDMF11-19	19,0	7 500	30,2	32	11
HDMF11-150	150,0	3 000	238	145	70
HDMF11-250	242,0	2 700	384	190	77

On note C_m le couple moteur, ω_m sa vitesse de rotation par rapport au bâti, et V la vitesse du chariot.

La loi de vitesse du chariot pendant la totalité du trajet est présentée ci-dessous :



- On note t_r la durée de la phase de déplacement rapide, t_l la durée de la phase lente, t_f la durée totale, t_a la durée de la phase d'accélération. Chacune des 2 phases de décélération dure $t_a/2$.
- L'analyse précédente de la course du chariot arrière (Question 7) a permis de chiffrer les valeurs des courses maximales de ce chariot en vitesse rapide (pour un tube de 4,4 m) et vitesse lente. Cette course pendant la phase de déplacement en vitesse rapide (de 0 à t_r) est au maximum de $c_{rap} = 6,24$ m (pour le tube le plus court que peut tester le banc) et pendant la phase en vitesse lente (de t_r à t_l) $c_{lent} = 1,56$ m.
- La durée maximale du déplacement total (phase rapide + phase lente) est limitée à 20 s.
- La vitesse du chariot, lors de la phase rapide, V_{rap} est limitée à 0,5 m/s.
- On considérera que le module de l'accélération a du chariot est identique pendant toutes les phases d'accélération et de décélération.

Question 1

- a. Montrer alors que t_a , t_l et t_r vérifient les relations suivantes :

$$c_{lent} = \frac{V_{rap}}{2} \cdot t_l \quad \text{et} \quad c_{rap} = V_{rap} \cdot \left(t_r - \frac{1}{2} t_a \right)$$

- b. En déduire les valeurs numériques de t_r et de t_a . En déduire l'accélération a du chariot.

Question 2

- a. Déterminer ω_m en fonction de V et des données cinématiques utiles.
- b. En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur ω_m et de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_m$ pendant les phases d'accélération et de décélération.

Question 3

- a. Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble Σ (défini figure 6) par rapport au référentiel galiléen bâti.
- b. En déduire l'expression de l'inertie équivalente de cet ensemble ramenée à l'axe de sortie du moteur, notée J_{eq} en fonction de M , I_m , I , et des données cinématiques utiles. Application numérique.

- Les efforts résistants sur le chariot sont modélisés par un glisseur F d'amplitude 500 N.
- Le rendement de l'ensemble du mécanisme (réducteur roue et vis sans fin, réducteur à axes parallèles) est $\eta = 0,3$.
- Quelles que soient les valeurs précédemment trouvées, on prendra une accélération angulaire maximale du moteur $\dot{\omega}_m$ égale à 250 rad/s² et une inertie totale équivalente ramenée à l'arbre moteur J_{eq} égale à 0,01 kg.m².

On se propose de déterminer le couple nécessaire du moteur.

Question 4 Déterminer l'expression du couple C_m à fournir par le moteur en fonction de $\dot{\omega}_m$, J_{eq} et F . Calculer C_m .

Question 5 A partir de la valeur de C_m et de la vitesse moteur ω_m calculées précédemment, choisir dans le tableau fourni en annexe 7 un moteur compatible avec les spécifications demandées.

Système de Levage à Multiples Colonnes (CCP – MP – 2011)

Les sociétés de transports publics des grandes agglomérations gèrent des réseaux comportant des bus et/ou des tramways. Ces sociétés possèdent des centres de maintenance ayant en charge l'entretien et la réparation de leurs véhicules. Parmi ces véhicules, on peut trouver des tramways de deux types : sur rails ou sur pneus. On s'intéresse ici à la maintenance de tramways sur rails de type TFS (Tramway Français Standard) : voir Annexe 1 photo 1.

Les rames TFS sont dotées d'un plancher bas, à 35 cm au-dessus du sol, sur les 3/4 de leur longueur. Dans le cadre d'une opération de maintenance, il est nécessaire d'intervenir sous le tramway et donc de le soulever entièrement.

Problématique : comment soulever une rame de tramway de 45 tonnes et de 30 mètres de long à une hauteur suffisante (de l'ordre de 1m70) pour réaliser la maintenance des boggies et divers matériels se trouvant sous le tramway ?

Le système de levage est constitué d'une armoire de commande (nommée PC) munie d'un pupitre de commande, d'un API (Automate Programmable Industriel), de relais et cartes de commande pour moteurs. Cette PC peut gérer jusqu'à 10 colonnes de levage. Ces colonnes de levage (voir Annexe 1, photos 2 à 6) sont des unités indépendantes mobiles que l'on peut déplacer manuellement grâce à des roues escamotables. Elles sont constituées d'un chariot de levage (voir **Modèle numérique de la colonne** en Annexe 1) guidé par 4 galets roulant à l'intérieur d'une colonne (rails en tôle pliée). L'entraînement du chariot se fait par une vis à filet trapézoïdal (voir Annexe 1 photo 6), mise en rotation par un moto-réducteur-frein asynchrone. On met en place les colonnes au niveau de la plateforme du tramway à soulever, aux endroits prévus à cet effet.

A2 - Dimensionnement du moteur électrique

Objectif : valider le dimensionnement du moteur (couple, vitesse, puissance) en régime nominal et en phase d'accélération.

L'objectif est de valider que le moteur proposé correspond aux impératifs de couple et de vitesse imposés par le cahier des charges. Les éléments importants à respecter sont :

- « la masse maximale à soulever est de 6 tonnes, soit 6000 kg, inférieure à la capacité maximale » ;
- « la vitesse de levée doit être de 10 mm/s, soit 0,010 m/s » ;
- « la phase d'accélération ne doit pas excéder 0,5 s ».

Lors de la conception, plusieurs technologies ont été étudiées, que ce soit au niveau de la motorisation ou de la commande (étudiée dans la partie C).

La solution retenue concernant la chaîne de transmission de puissance est décrite en Annexe 2 sur les figures 5 et 6 qui présentent le modèle d'étude utilisé et certaines données techniques.

Le moteur choisi est un moteur asynchrone de type LS100L, d'une puissance de 2,2 kW, équipé d'un frein FCR J02 (voir Annexe 2, figure 7).

Question 1 : Compte tenu du paramétrage, on peut écrire : $\overline{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \overline{X}_0 = \dot{\theta}_1 \overline{X}_0$.

a - Exprimer de manière littérale, en fonction du paramètre $\dot{\theta}_1$, et des données concernant les roues dentées et le système vis-écrou, les vecteurs vitesse de rotation $\overline{\Omega}_{2/0}$, $\overline{\Omega}_{3/0}$ et la vitesse de levée $V_L = \dot{z}_4$.

Déterminer numériquement les rapports entre les vitesses $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$, $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$, $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$ et

$r_g = \frac{V_L}{\omega_{10}}$ (les vitesses de rotation étant exprimées en rad/s et la vitesse linéaire en m/s).

Quelle que soit la valeur trouvée pour r_g , la valeur utilisée dans la suite du sujet sera : $r_g = 6,36 \times 10^{-5}$ m.

b - Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tr/min) conformément au cahier des charges. Conclure en comparant la valeur trouvée avec la vitesse nominale du moteur (voir Annexe 2, figure 7).

Question 2 : L'énergie cinétique d'un solide S_i en mouvement par rapport à un repère R_j sera notée T_{ij} .

a - Déterminer les expressions littérales des énergies cinétiques des différents solides du système S (arbre 1, arbre 2, vis 3, chariot 4, masse 5) en mouvement par rapport au repère galiléen R_0 , en fonction des données cinétiques fournies (voir Annexe 2, figure 6), des rapports r_{ij} et du paramètre $\dot{\theta}_1$.

b - Déterminer littéralement et numériquement le rendement global du système, noté η_g , en fonction des différents rendements.

c - Déterminer l'expression de la puissance perdue dans les liaisons en fonction de la puissance motrice P_m et du rendement global η_g .

Dans la suite du problème, on négligera les énergies cinétiques des solides 2, 3, 4 et 5 devant l'énergie cinétique du solide 1 et l'influence de la masse M_4 (21,7 kg) devant la masse M_5 (6000 kg). La valeur de l'accélération de la pesanteur g sera prise égale à $9,81 \text{ m/s}^2$.

Question 3 : Déterminer l'expression littérale du couple moteur C_m en fonction de $\ddot{\theta}_1$.

Annexe 1 : Photos 1 à 6

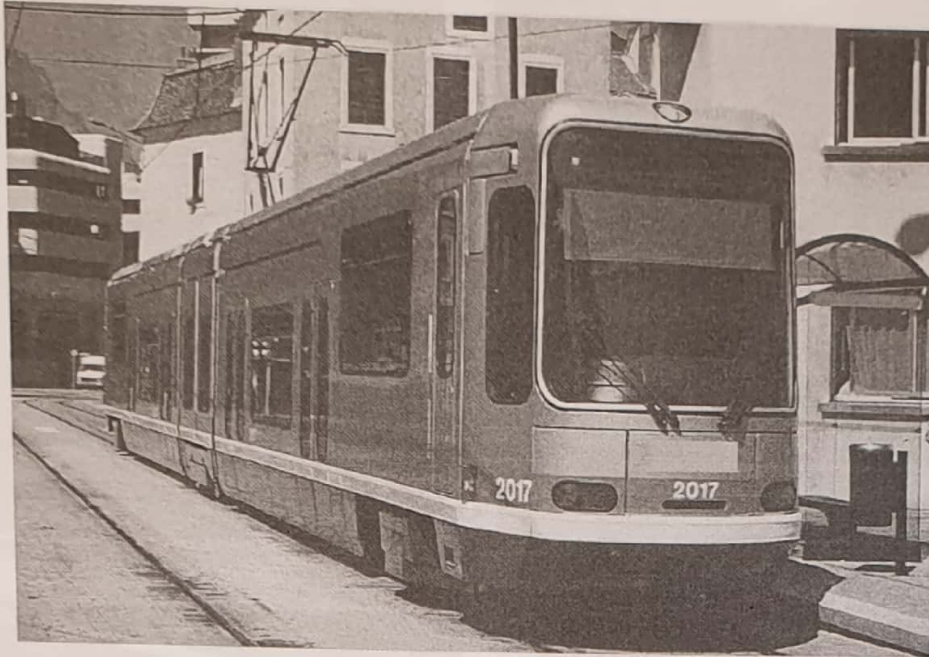


Photo 1 : TFS = Tramway Français Standard

Photo Legrand - Wikipédia

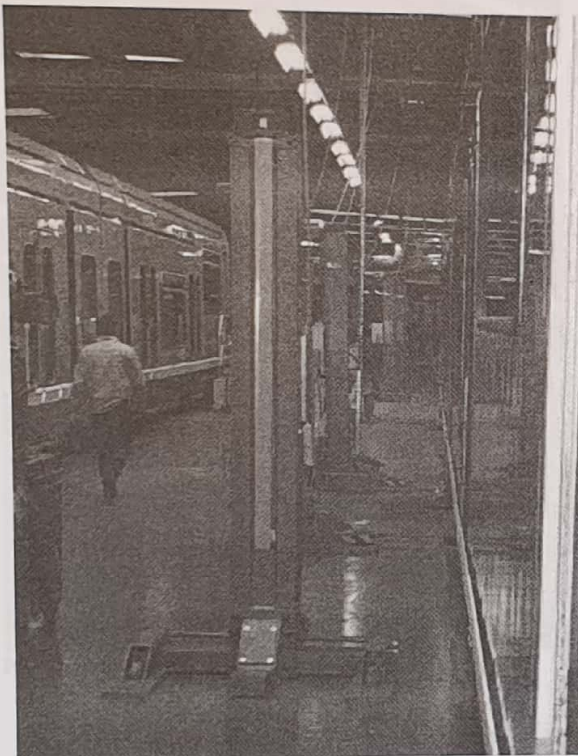
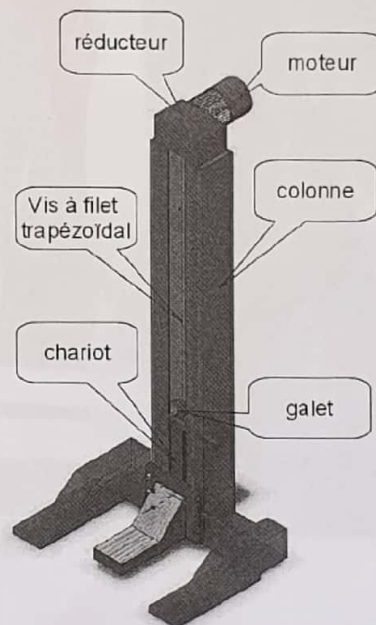


Photo 2 : Colonne de levage



Modèle numérique de la colonne



Photo 3 : Mise en place d'une colonne

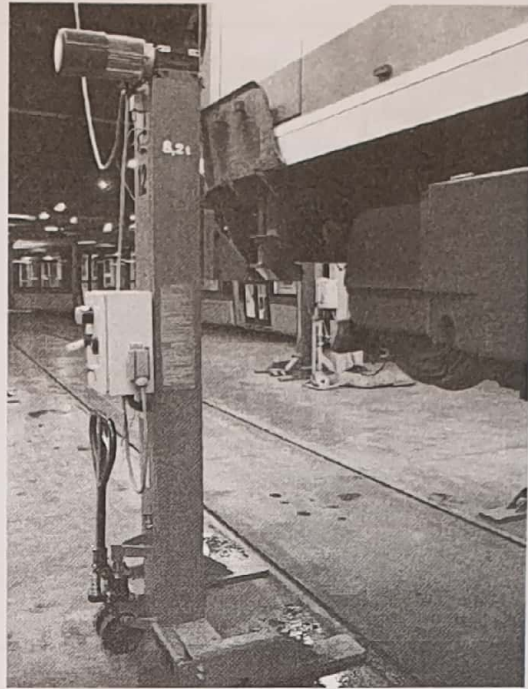


Photo 4 : Colonne d'extrémité en phase de levage



Photo 5 : Tramway en position soulevée

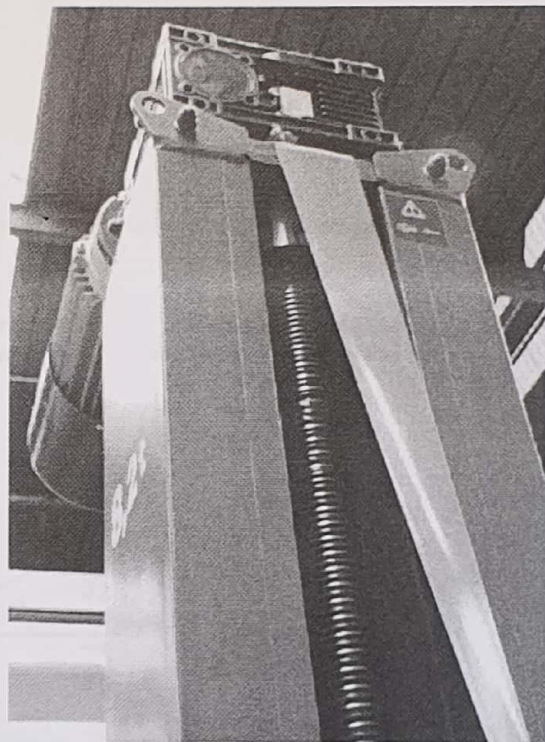
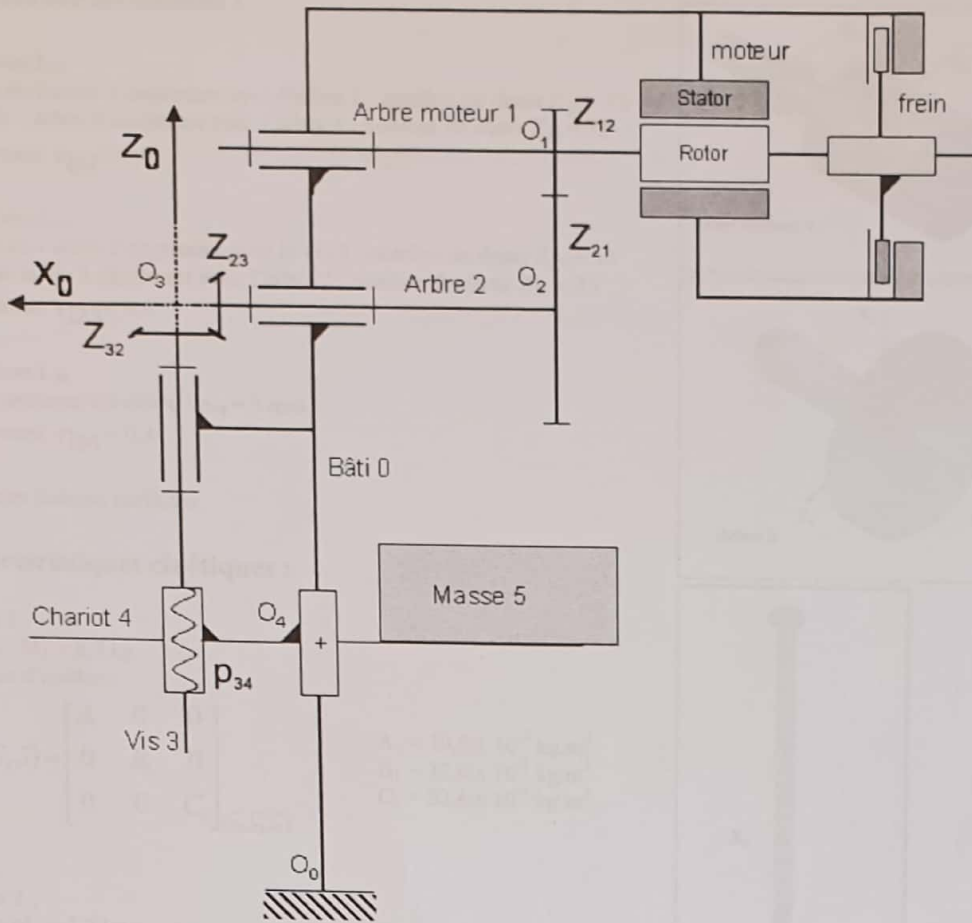


Photo 6 : Vis d'entraînement

Figure 5 : Matériel utilisé



Actions exercées par le moteur : Actions exercées par le stator sur le rotor modélisées par le couple C_m

Paramètres associés aux mouvements :

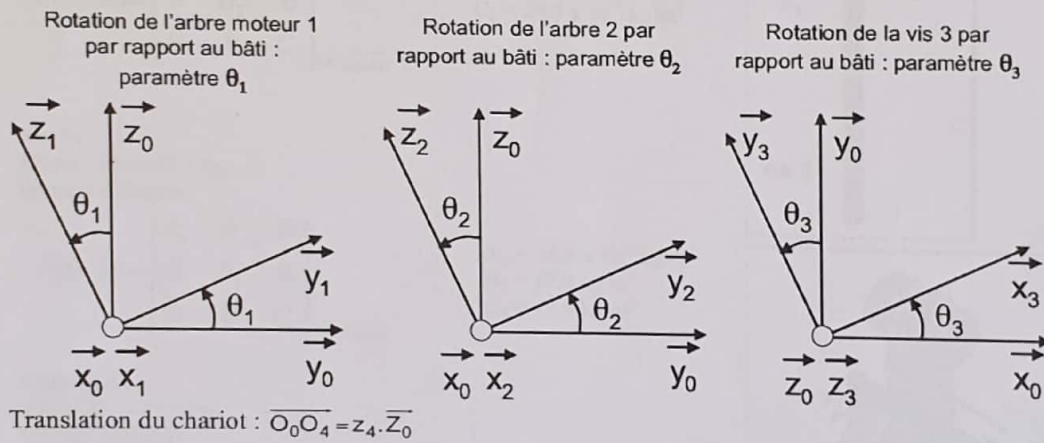


Figure 5 : Modélisation cinématique

Données sur les liaisons :

a) Liaison L_{12}

Pignon de l'arbre 1 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents $Z_{12} = 15$

Roue de l'arbre 2 engrenant avec l'arbre 1 : nombre de dents $Z_{21} = 75$

Rendement $\eta_{12} = 0,9$

b) Liaison L_{23}

Pignon de l'arbre 2 engrenant avec la vis 3 : nombre de dents $Z_{23} = 14$

Roue de la vis 3 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents $Z_{32} = 35$

Rendement $\eta_{23} = 0,9$

c) Liaison L_{34}

Pas du système vis-écrou : $p_{34} = 5$ mm

Rendement $\eta_{34} = 0,4$

d) Autres liaisons parfaites

Caractéristiques cinétiques :

Arbre 1

Masse : $M_1 = 8,9$ kg

Matrice d'inertie :

$$I(G_1,1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

$$A_1 = 10,5 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$B_1 = 32,6 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$C_1 = 32,6 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Arbre 2 :

Masse $M_2 = 7,7$ kg

Matrice d'inertie :

$$I(G_2,2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)}$$

$$A_2 = 16,2 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$B_2 = 29,8 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$C_2 = 29,8 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Vis 3 :

Masse : $M_3 = 37,1$ kg

Matrice d'inertie :

$$I(G_3,3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$A_3 = 13,6 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$B_3 = 17,9 \text{ kg.m}^2$$

$$C_3 = 17,9 \text{ kg.m}^2$$

Chariot 4 :

Masse $M_4 = 21,7$ kg

Matrice d'inertie :

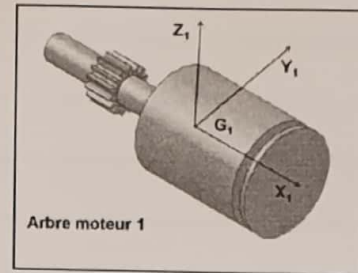
$$I(G_4,4) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & -E_4 \\ 0 & B_4 & 0 \\ -E_4 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)}$$

$$A_4 = 12,1 \text{ kg.m}^2$$

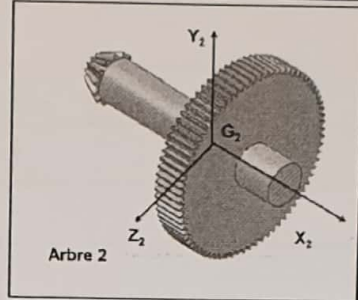
$$B_4 = 5,7 \text{ kg.m}^2$$

$$C_4 = 8,1 \text{ kg.m}^2$$

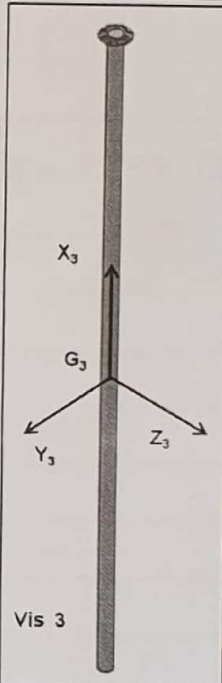
$$E_4 = 3,2 \text{ kg.m}^2$$



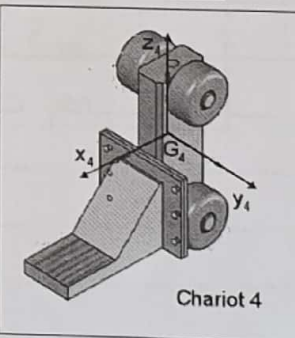
Arbre moteur 1



Arbre 2



Vis 3



Chariot 4

Figure 6 : Données techniques et cinétiques du modèle d'étude

Question 18

$$\vec{\omega}(1/0) = \dot{\theta}_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{\omega}(2/0) = \dot{\theta}_2 \vec{x}_0$$

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = -\frac{z_{21}}{z_{12}} \Rightarrow \dot{\theta}_2 = -\frac{z_{12}}{z_{21}} \dot{\theta}_1$$

$$\vec{\omega}(2/0) = -\frac{z_{12}}{z_{21}} \dot{\theta}_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{\omega}(3/0) = \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

$$\frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_2} = -\frac{z_{23}}{z_{32}} \Rightarrow \dot{\theta}_3 = -\frac{z_{23}}{z_{32}} \dot{\theta}_2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_3 = \frac{z_{23} z_{12}}{z_{21} z_{32}} \dot{\theta}_1$$

$$\vec{\omega}(3/0) = \frac{z_{23} z_{12}}{z_{21} z_{32}} \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\vec{V}_L = \vec{V}(4/0) = V_L \vec{z}_0$$

$$V_L = \frac{p_{34}}{2\pi} \dot{\theta}_3 = \frac{p_{34}}{2\pi} \frac{z_{23} z_{12}}{z_{21} z_{32}} \dot{\theta}_1$$

$$\omega_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = -\frac{z_{12}}{z_{21}}$$

$$A.N. = -\omega_{12} = 0,2$$

$$+ r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{30}} = \frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_2} = -\frac{z_{23}}{z_{32}}$$

AN: $r_{23} = -0,4$

$$* r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}} = \frac{V_L}{\dot{\theta}_3} = \frac{P_{34}}{2\pi}$$

A. n $r_{34} = 0,79 \text{ mm/rad}$

$$+ r_g = \frac{V_L}{\omega_{10}} = \frac{V_L}{\dot{\theta}_1} = \frac{V_L}{\dot{\theta}_3} \cdot \frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_2} \cdot \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = r_{12} \cdot r_{23} \cdot r_{34}$$

A. n $r_g = 0,063 \text{ mm/rad}$

b] $V_L = 10 \text{ mm/s}$ (énoncé).
on a $\dot{\theta}_1 = \frac{V_L}{r_g}$

A. n. $\dot{\theta}_1 = \frac{10}{0,0636} \cdot \frac{60}{2\pi} = 1507,46 \text{ tr/min}$

Question 2]

$$T(5/R_0) = T(1/R_0) + T(2/R_0) + T(3/R_0) + T(4/R_0) + T(5/R_0)$$

On suppose que tous les solides sont équilibrés dynamiquement ("les solides en rotation")

$$\bullet T(1/R_0) = \frac{1}{2} A_1 \dot{\theta}_1^2$$

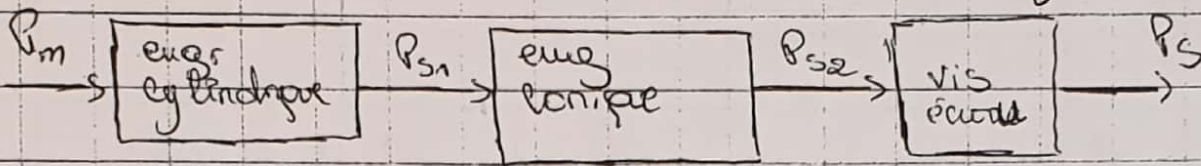
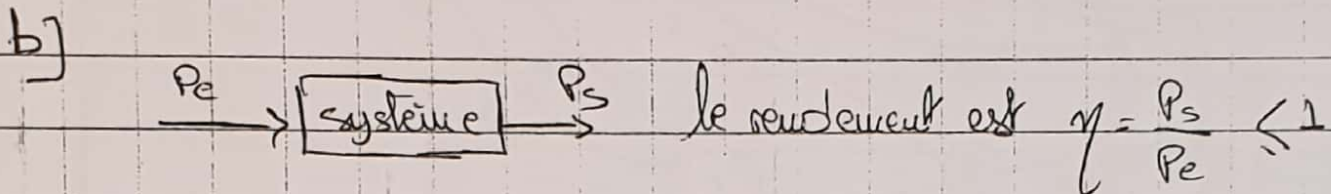
$$\bullet T(2/R_0) = \frac{1}{2} A_2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} A_2 r_{12}^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T(3/R_0) = \frac{1}{2} C_3 \dot{\theta}_3^2 = \frac{1}{2} C_3 (r_{12} r_{23})^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T(4+5/R_0) = \frac{1}{2} (M_4 + M_5) r_3^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$\text{donc } T(S/R_0) = \frac{1}{2} [A_1 + r_{12}^2 A_2 + (r_{12} r_{23})^2 C_3 + r_3^2 (M_4 + M_5)] \dot{\theta}_1^2$$

$$\text{ou } T(S/R_0) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2$$



$$\frac{P_{s1}}{P_m} = \eta_{12}, \quad \frac{P_{s2}}{P_{s1}} = \eta_{23}, \quad \frac{P_s}{P_{s2}} = \eta_{34}$$

$$\frac{P_s}{P_m} = \frac{P_s}{P_{s2}} \times \frac{P_{s2}}{P_{s1}} \times \frac{P_{s1}}{P_m} = \eta_{12} \times \eta_{23} \times \eta_{34}$$

$$\eta_g = 0,324 = 32,4\%$$

$$c) P_{perdue} = P_m (\eta_g - 1) = -0,676 \cdot P_m$$

Question 3:

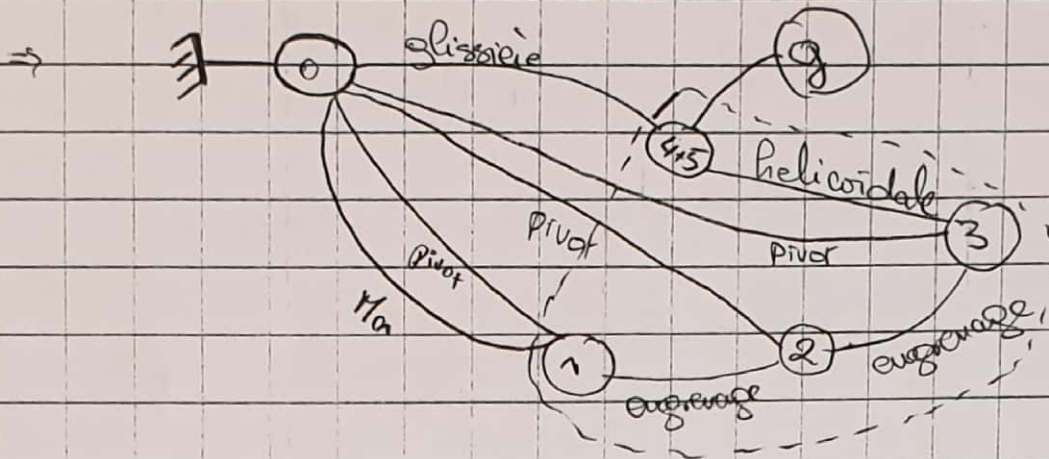
On applique TEC à S_{ps}/R_0

$$\frac{d}{dt}(T(S/Q_0)) = P(\bar{3} \rightarrow S/Q_0) + P_{int}$$

on a

$$T(S/Q_0) = \frac{1}{2} A_n \dot{\theta}_n^2$$

$$P_{int} = \frac{1}{2} = 0,676 P_m$$



on a toutes les liaisons sont parfaites

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0 \xrightarrow{\text{gliss}} 4/0) = P(0 \xleftarrow{\text{gliss}} 4) = 0 \\ P(0 \xrightarrow{\text{pivot}} 3/0) = P(0 \xleftarrow{\text{pivot}} 3) = 0 \\ P(0 \xrightarrow{\text{pivot}} 2/0) = P(0 \xleftarrow{\text{pivot}} 2) = 0 \\ P(0 \xrightarrow{\text{pivot}} 1/0) = P(0 \xleftarrow{\text{pivot}} 1) = 0 \end{array} \right.$$

c'est $P_m(P(0 \xrightarrow{\text{mot}} 1/Q_0))$

$$P(\bar{3} \rightarrow S/Q_0) = C_m \dot{\theta}_n + P(g \rightarrow S/0)$$

$$\begin{aligned} P(g \rightarrow S/0) &= \{ \tau(g \rightarrow S) \} \{ v(S/0) \} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} -M_5 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v_{E30} \\ -M_5 g v_L \end{array} \right\} = -M_5 g \dot{\theta}_n r_g \end{aligned}$$

Le T-EC \Rightarrow d'où d'après TEC

$$\begin{aligned} A_n \ddot{\theta}_n &= 0,676 C_m \dot{\theta}_n + C_m \dot{\theta}_n \\ &= C_m (-0,676 + 1) \dot{\theta}_n - M_5 g r_g \end{aligned}$$

(voir en bas de la page 5)

Q1] (a) ⇒ Calcul de l'aire entre la courbe et l'axe des Temps :

(b) ⇒ $t_r = t_f - t_e = t_f - \frac{2 C_{Lent}}{V_{rope}} \approx 13,76 \text{ s}$
 $t_a = 2,56 \text{ s}$ et $a = 0,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Q2] (a) ⇒ $v = R_p \cdot \frac{R_1}{R_3} \cdot r \cdot \omega_m$ donc: $\omega_m = \frac{v \cdot R_3}{r \cdot R_p \cdot R_1}$

et $\ddot{\omega}_m = \frac{\dot{v} \cdot R_3}{r \cdot R_p \cdot R_1}$

A.N.: $\omega_m = -406 \text{ rad/s}$ et $\ddot{\omega}_m = -158,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

Q3] (a) ⇒ $T(\Sigma/O) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (I_m \omega_m^2 + I_r \omega_m^2)$

(b) ⇒ $J_{eq} = m \frac{r^2 \cdot R_p^2 \cdot R_1^2}{R_3^2} + I_m + I_r \approx 0,00877 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Q4] T.E.C à Σ/O:

$T(\Sigma/O) = J_{eq} \cdot \omega_m^2$ et $P_{ext} = -F \cdot v + C_m \omega_m$

$P_{int} = C_m \omega_m (\eta - 1)$

donc: $C_m = \frac{1}{\eta} \left(J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m + \frac{F \cdot r \cdot R_p \cdot R_1}{R_3} \right)$

A.N.: $C_m \approx 10,4 \text{ m} \cdot \text{N}$

Consulter le tableau pour le choix du moteur.

lien
et
fin
du
CCP-PSI
2011

$$A_1 \ddot{\theta}_1 = [0,676 + 1] C_m - 175 \text{ grg}$$

$$C_m = \frac{A_1 \ddot{\theta}_1 + 175 \text{ grg}}{1 - 0,676} = \frac{A_1 \ddot{\theta}_1 + 175 \text{ grg}}{0,324}$$

$$\Rightarrow C_m = \frac{A_1 \ddot{\theta}_1 + 175 \text{ grg}}{0,324}$$

Chapitre : P.F.D TD :

ROBDRIVE

I- PRESENTATION ET ANALYSE FONCTIONNELLE DU SYSTEME

Pour accomplir des missions de transport de charge ou d'utilisateur une société européenne a conçue, développé et commercialisé sous le nom de **ROBDRIVE**, des véhicules électriques automatiques intelligents. Le **ROBDRIVE** est appelé à travailler dans des milieux nocifs (toxique, radioactif...) ou sains (processus à degré d'automatisation élevé ...) et à transporter des charges dangereuses ou des utilisateurs dans des circuits prédéfinis. (Voir document technique DT1).



La partie commande est réalisée par :

Un ordinateur de bord embarqué et deux boîtiers électroniques avec calculateurs. Elle intègre une fonction de sécurité basée sur la détection et la localisation sur la piste, soit d'éventuel obstacle, soit de deux ROBDRIVE successifs.

La partie opérative est constituée d'un châssis et de deux ponts (avant et arrière) identiques et indépendants. Chaque pont comporte :

- deux roues entraînées chacune par un motoréducteur ;
- une commande de direction ;
- deux dispositifs de suspension chacun au près d'une roue.

II- ETUDE INERTIELLE APPROCHEE D'UNE JANTE ET EQUILIBRAGE DYNAMIQUE:**II-1- Détermination approchée de la matrice d'inertie d'une jante :**

On assimile la jante d'une roue du ROBDRIVE à deux **cylindres creux** (Cy_1) et (Cy_2) d'épaisseurs négligeables rigidement liés par trois **plaques rectangulaires identiques** (P_1), (P_2) et (P_3) d'épaisseurs négligeables aussi. Ces trois plaques sont uniformément réparties comme les montre la **figure 4 du document technique DT2**.

Le but de cette partie est la détermination de la matrice d'inertie de la jante (S) = $\{Cy_1, Cy_2, P_1, P_2, P_3\}$

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ le repère lié aux cylindres (Cy_1) et (Cy_2), O étant leur centre d'inertie commun et (O, \bar{x}) leur axe de symétrie matérielle de révolution.

On note L la longueur de la jante donc celle des deux cylindres creux (Cy_1) et (Cy_2) et des trois plaques (P_i).

On note r_1 le rayon de (Cy_1) et r_2 celui de (Cy_2). La largeur de chaque plaque (P_i) est $a = r_2 - r_1$.

Les cylindres creux et les plaques rectangulaires sont supposés homogènes, On note M_1 et M_2 les masses respectivement de (Cy_1) et (Cy_2) et m_p celle de chacune des plaques (P_i).

On note $R_i(G_i, \bar{x}, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ le repère lié à la plaque rectangulaire (P_i) (figure 6 document technique DT2), tel que \bar{x} et \bar{z}_i soient parallèles respectivement au grand et au petit coté de (P_i), \bar{y}_i perpendiculaire au plan de celle-ci et G_i son centre d'inertie.

➤ **Question 1 :** (voir figure 5 document technique DT2)

Donner la matrice d'inertie du cylindre creux (Cy_1) d'épaisseur e_1 négligeable, en son centre d'inertie O dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

➤ **Question 2 :** (voir figure 6 document technique DT2)

- Donner en fonction de m_p , L et a, la matrice d'inertie de la plaque rectangulaire (P_i) en son centre d'inertie G_i et dans la base $(\bar{x}, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ liée à celle-ci.
- Déterminer en fonction de m_p , L, r_1 et a, la matrice d'inertie de la plaque rectangulaire (P_i) au point O dans la base $(\bar{x}, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$.

Par la suite la matrice d'inertie de la plaque (P_i) au point O dans la base $(\bar{x}, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ sera notée :

$$[I_O(P_i)] = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_i, \bar{z}_i)}$$

➤ **Question 3 :**

- Déterminer en fonction de B_i , C_i et θ_i le moment d'inertie de la plaque (P_i) par rapport à l'axe (O, \bar{y}) noté $I_{oy}(P_i)$.
- Déterminer en fonction de B_i , C_i et θ_i le moment d'inertie de la plaque (P_i) par rapport à l'axe (O, \bar{z}) noté $I_{oz}(P_i)$.

➤ **Question 4 :**

- Montrer que la matrice d'inertie de la jante (S) = $\{Cy_1, Cy_2, P_1, P_2, P_3\}$ au point O dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{pmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

- Déterminer les moments d'inerties A_S , B_S et C_S .

II-2- Equilibrage d'une roue du ROBDRIVE :

Pour assurer le confort de l'utilisateur et pour garantir une longue durée de vie des paliers guidant les roues en rotation, il faut éliminer toute forme de vibration due à une mauvaise répartition de la masse

dans les roues. On doit donc réaliser l'équilibrage dynamique des roues (voir **figure ci-dessous**).

On note $R_R(O_R, \bar{x}_R, \bar{y}_R, \bar{z}_R)$ un repère lié à la roue

(R_i) tel que (O_R, \bar{x}_R) soit son **axe de rotation**.

Les défauts de répartition de la masse nous conduisent à considérer que la roue (R_i) de **masse m_R** , a pour centre d'inertie G_R tel que $\overline{O_R G_R} = h \bar{x}_R + d \bar{y}_R$ et sa matrice d'inertie au point O_R est :

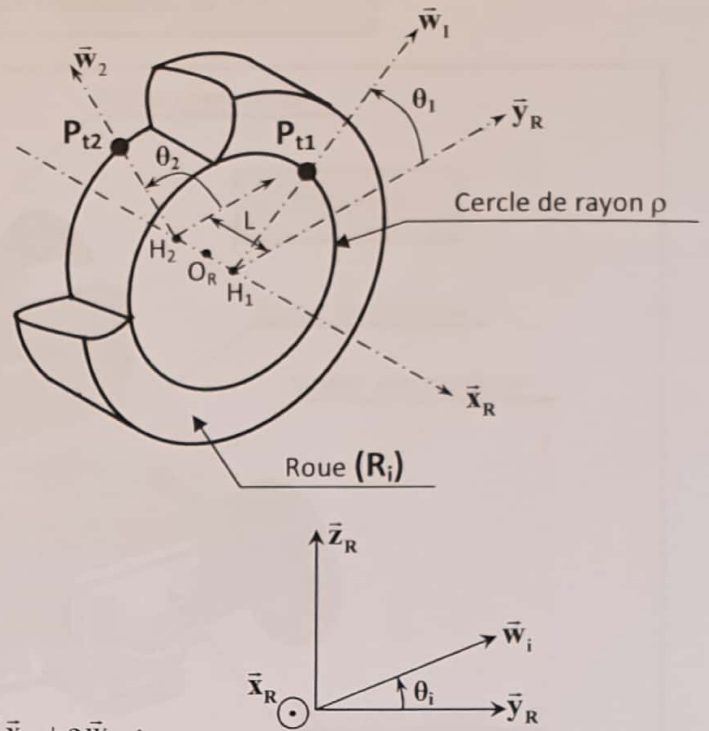
$$[I_{O_R}(R_i)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\bar{x}_R, \bar{y}_R, \bar{z}_R)}$$

Pour équilibrer la roue, on fixe sur les deux bords de sa Jante deux masselottes (P_{11}) et (P_{12}) supposées ponctuelles.

On note m_1 la masse de (P_{11}) , m_2 celle de (P_{12}) et $\overline{O_R P_{11}} = \frac{L}{2} \bar{x}_R + \rho \bar{w}_1$;

$$\overline{O_R P_{12}} = \frac{-L}{2} \bar{x}_R + \rho \bar{w}_2.$$

Pour réaliser l'équilibrage dynamique de la roue (R_i) ; il suffit de déterminer les masses m_1 et m_2 des deux masselottes ainsi que leurs positions angulaires de fixation θ_1 et θ_2 .



➤ Question 5 :

Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de l'ensemble $\Sigma = \{R_i, P_{11}, P_{12}\}$ dans le repère R_R .

➤ Question 6 :

Déterminer dans la base de R_R , la matrice d'inertie au point O_R de l'ensemble $\Sigma = \{R_i, P_{11}, P_{12}\}$

➤ Question 7 :

Traduire les deux conditions d'équilibrage dynamique pour l'ensemble $\Sigma = \{R_i, P_{11}, P_{12}\}$, en déduire les quatre équations scalaires liant m_1 , m_2 , θ_1 , θ_2 et des données géométriques et d'inertie.

➤ Question 8 :

Déterminer les expressions des masses m_1 et m_2 et des angles θ_1 et θ_2 .

⚠ Un solide (S) est équilibré dynamiquement autour d'un axe (Δ) si :

- le centre de gravité G du solide E $\bar{a}(\Delta)$; [équilibre statique]
- (Δ) est axe principal d'inertie de (S) .

DOCUMENT TECHNIQUE DT1

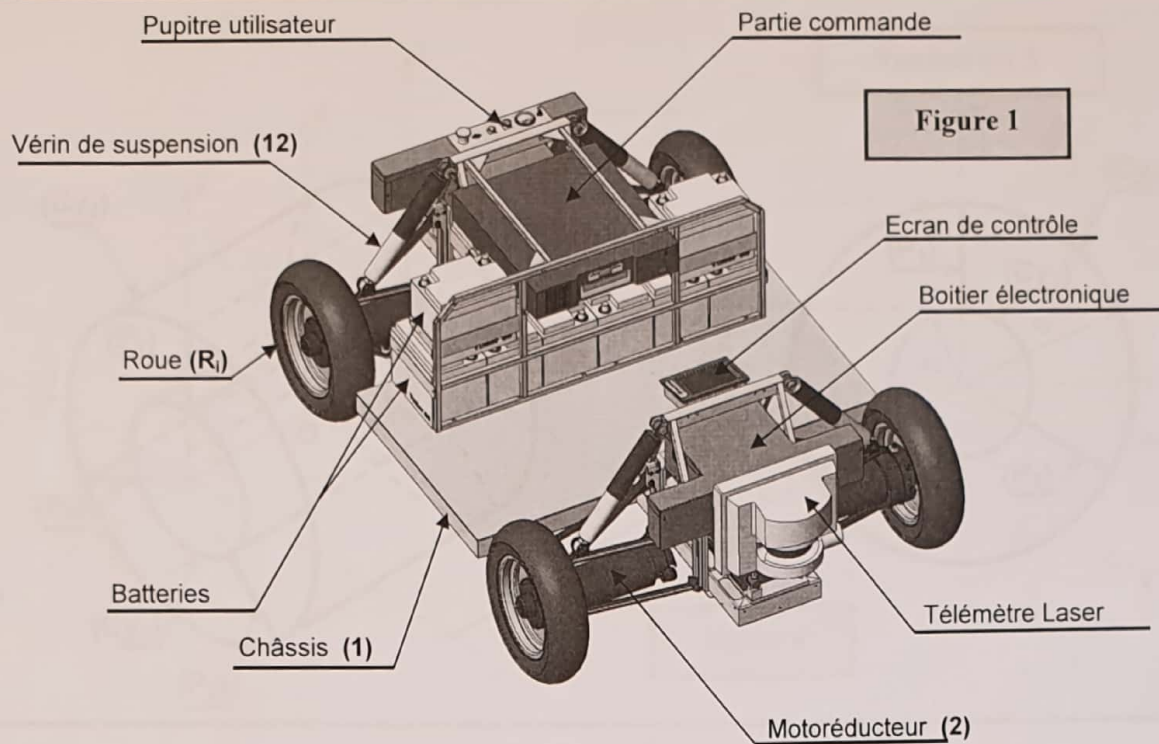


Figure 1

PONT ARRIERE (châssis (1) non représenté)

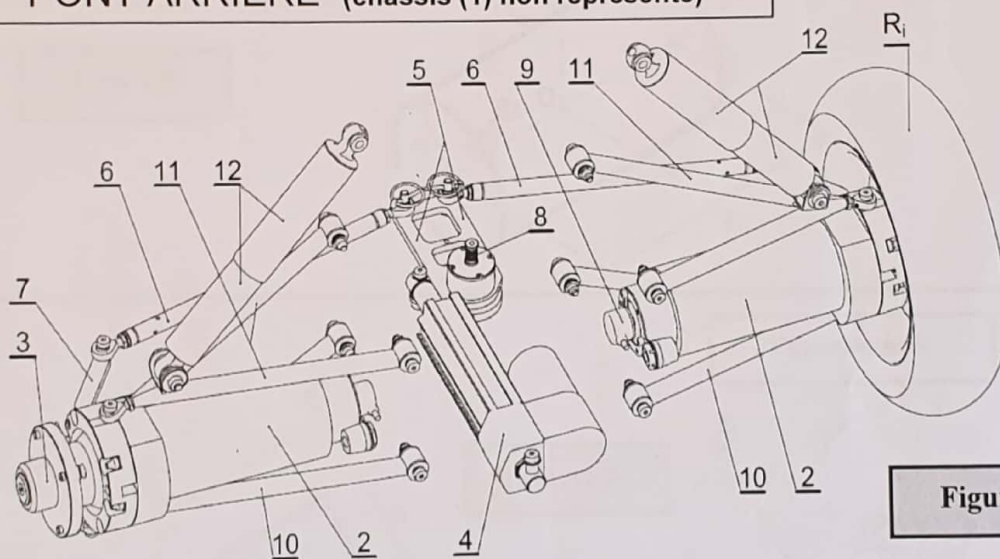


Figure 2

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (R _i) : Roue ; | (7) : Renvoi de braquage ; |
| (2) : Motoréducteur ; | (8) : Codeur absolu de braquage ; |
| (3) : arbre de roue ; | (9) : Codeur incrémental de rotation de roue ; |
| (4) : Vérin électrique de direction ; | (10) : Triangle de suspension inférieur ; |
| (5) : Equerre de direction ; | (11) : Triangle de suspension supérieur ; |
| (6) : Barre de direction ; | (12) : Vérin de suspension oléopneumatique ; |

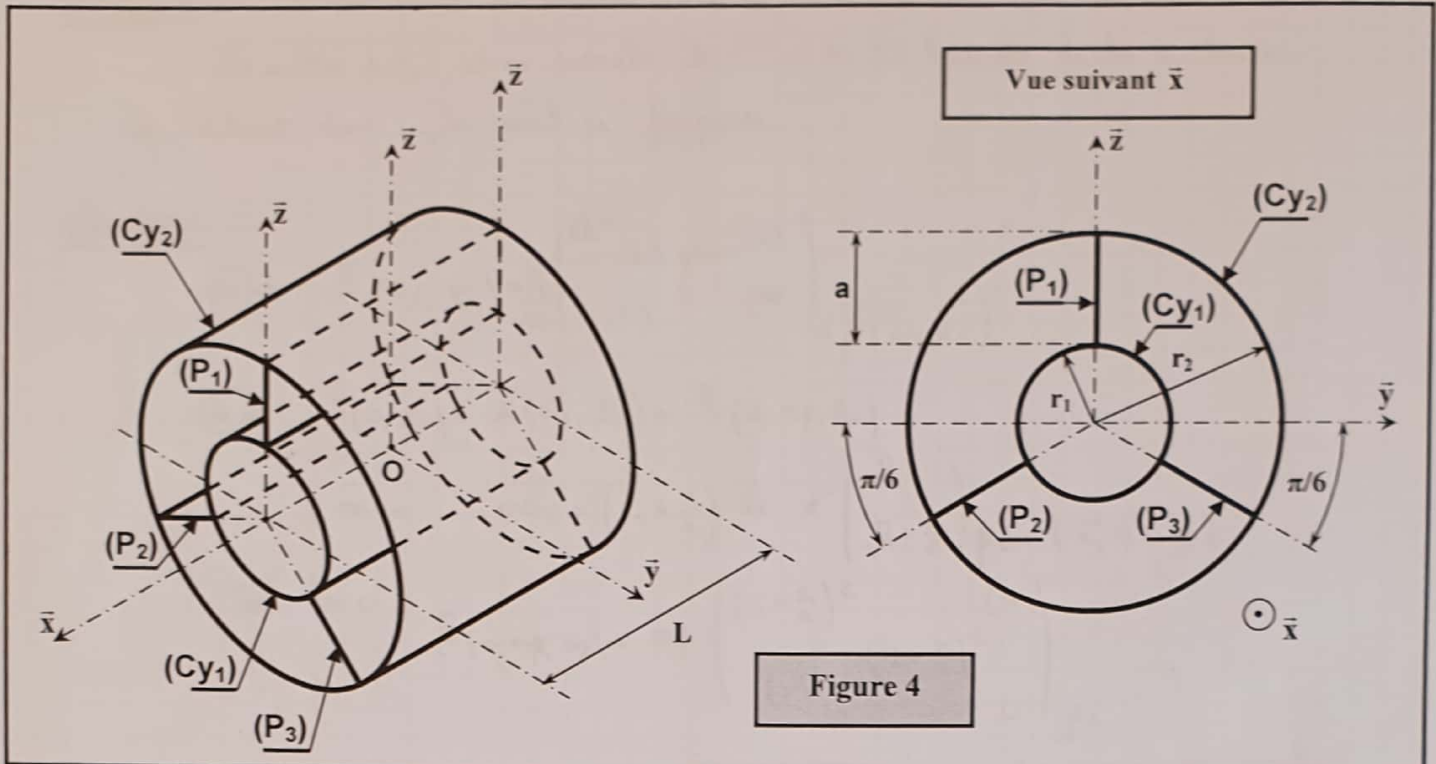


Figure 4

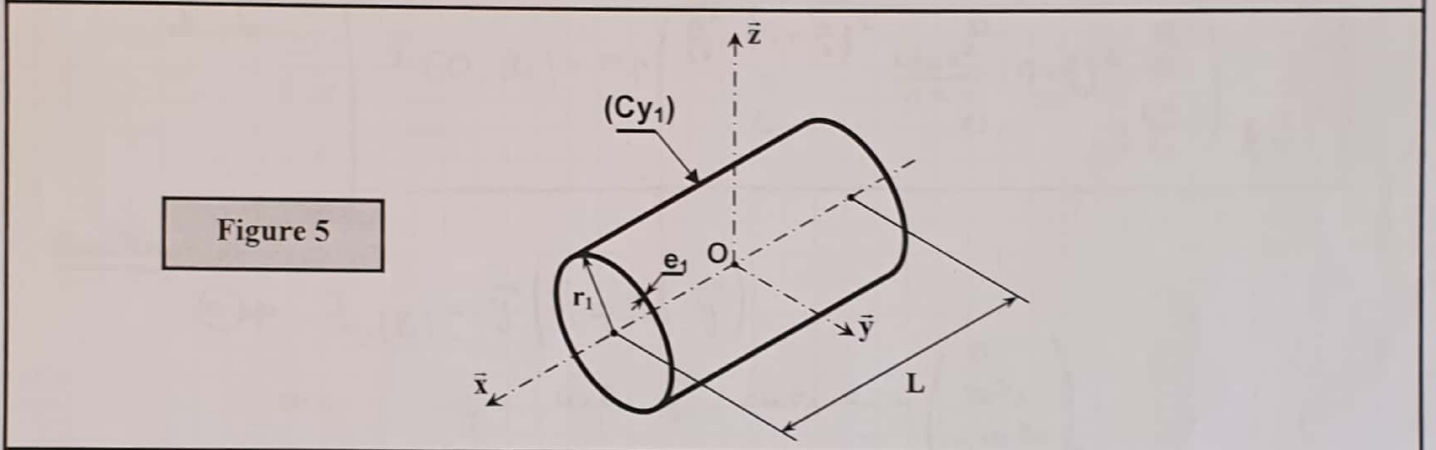


Figure 5

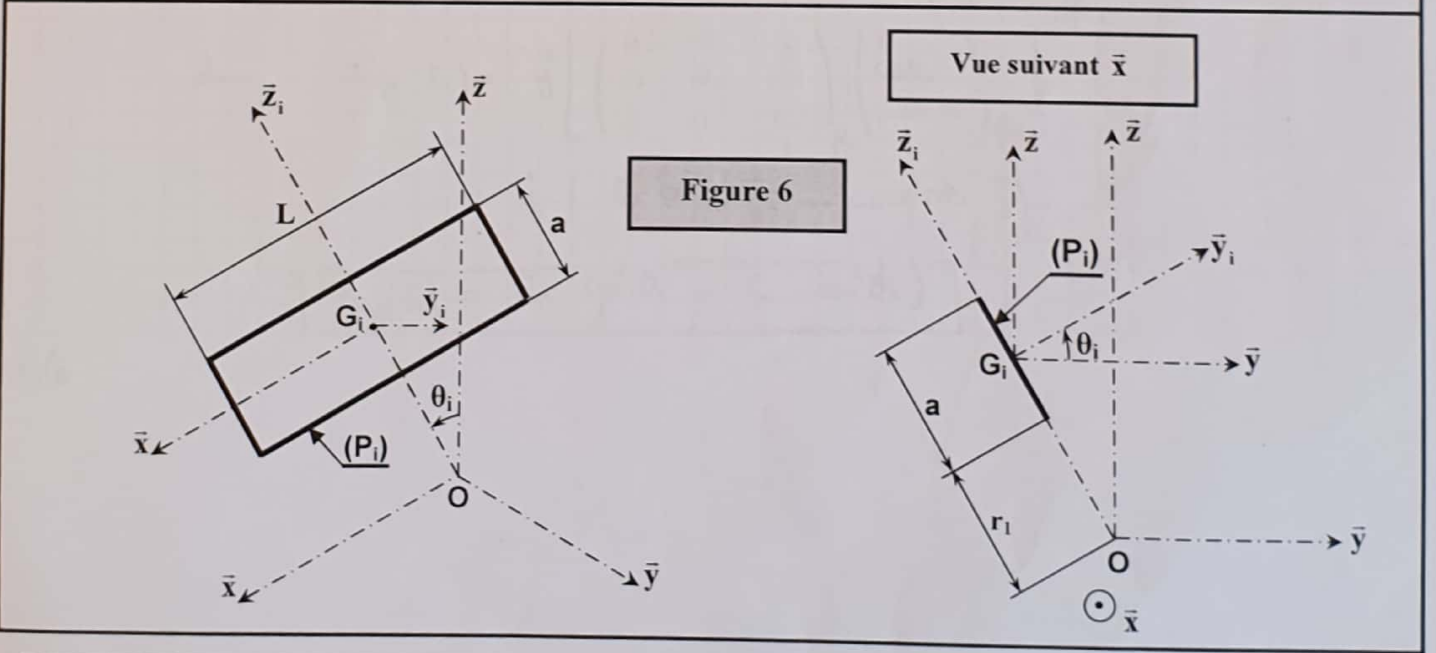


Figure 6

PROBLEME II: ROBDRIVE

Question 1 : Connaissant la matrice d'inertie d'un cylindre creux, on prend $R_i = R_e = r_1$, et on permute la 1^{ère} et la 3^{ème} quantité de la matrice. On obtient donc la matrice proposée.

Question 2 :

$$(a) \Rightarrow \bar{I}(G_i, P_i) = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} a^2 & L^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$$

$$(b) \Rightarrow \bar{I}(O, P_i) = \bar{I}(G_i, P_i) + \bar{I}(O, mp, G_i)$$

$$\text{on a: } \vec{OG}_i = \left(r_1 + \frac{a}{2}\right) \vec{z}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 + \frac{a}{2} \end{pmatrix}_{P_i} = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$$

Sait donc:

$$\bar{I}(O, mp, G_i) = mp \begin{pmatrix} \left(r_1 + \frac{a}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(r_1 + \frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{P_i}$$

et donc:

$$\bar{I}(O, P_i) = mp \begin{pmatrix} \frac{a^2}{12} + \left(r_1 + \frac{a}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} + \left(r_1 + \frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}_{P_i}$$

Question 3 :

$$(a) \Rightarrow I_{oy}(P_i) = \vec{y}_i \cdot \left(\bar{I}(O, P_i) \cdot \vec{y}_i \right)$$

$$\text{on a: } \vec{y}_i = \cos \theta_i \vec{y}_i - \sin \theta_i \vec{z}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta_i \\ -\sin \theta_i \end{pmatrix}_{P_i}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } I_{oy}(P_i) &= \vec{y}_i \cdot \left[\begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{P_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta_i \\ -\sin \theta_i \end{pmatrix}_{P_i} \right] \\ &= \vec{y}_i \cdot \left(B_i \cos \theta_i \vec{y}_i - C_i \sin \theta_i \vec{z}_i \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_{oy}(P_i) = B_i \cos^2 \theta_i + C_i \sin^2 \theta_i}$$

$$\textcircled{b} \Rightarrow I_{Oz}(P_i) = \vec{z} \cdot \left(\vec{I}(O, P_i) \cdot \vec{z} \right)$$

$$= \left(\sin \theta_i \vec{y}_i + \cos \theta_i \vec{z}_i \right) \cdot \left[\begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{pmatrix} \right]_{P_i}$$

$$\boxed{I_{Oz}(P_i) = B_i \sin^2 \theta_i + C_i \cos^2 \theta_i}$$

Question 4 :

(a) \Rightarrow (S) possède deux plans de sym. mat. \perp : (O, \vec{y}, \vec{z}) et (O, \vec{x}, \vec{z}) .

$$\textcircled{b} \Rightarrow A_S = I_{Ox}(Cy_1) + I_{Ox}(Cy_2) + I_{Ox}(P_1) + I_{Ox}(P_2) + I_{Ox}(P_3)$$

$$= M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + A_1 + A_2 + A_3 \quad (A_1 = A_2 = A_3)$$

$$\boxed{A_S = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + 3A_1}$$

$$B_S = I_{Oy}(Cy_1) + I_{Oy}(Cy_2) + I_{Oy}(P_1) + I_{Oy}(P_2) + I_{Oy}(P_3)$$

$$B_S = M_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + M_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + \sum_{j=1}^3 B_i (\cos^2 \theta_j + C_i \sin^2 \theta_j)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{B_S = M_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + M_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + \frac{3(B_i + C_i)}{2}}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ \theta_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$C_S = I_{Oz}(Cy_1) + I_{Oz}(Cy_2) + I_{Oz}(P_1) + I_{Oz}(P_2) + I_{Oz}(P_3)$$

$$C_S = M_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + M_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + \sum_{j=1}^3 (B_i \sin^2 \theta_j + C_i \cos^2 \theta_j)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{C_S = M_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + M_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right) + \frac{3}{2} (B_i + C_i) = B_S}$$

$$\text{Donc } \vec{I}(O, S) = \begin{pmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & B_S \end{pmatrix} \cdot (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Question 5 :

Pour que Σ soit équilibré dynamiquement autour de (O_R, \vec{x}_R) il faut que :

1. $G_\Sigma \in (O_R, \vec{x}_R)$;

2. (O_R, \vec{x}_R) est axe principal d'inertie de Σ .

Déterminons $\vec{O}_R \vec{G}_Z$: $\vec{O}_R \vec{G}_Z = \frac{m_R \vec{O}_R \vec{G}_R + m_1 \vec{O}_R \vec{P}_{t1} + m_2 \vec{O}_R \vec{P}_{t2}}{m_R + m_1 + m_2}$

on a : $\vec{O}_R \vec{G}_R = \begin{pmatrix} h \\ d \\ 0 \end{pmatrix}_{RR}$, $\vec{O}_R \vec{P}_{t1} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ p \cos \theta_1 \\ p \sin \theta_1 \end{pmatrix}_{RR}$ et $\vec{O}_R \vec{P}_{t2} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} \\ p \cos \theta_2 \\ p \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{RR}$

Donc : $X_{G_Z} = \frac{m_R h + m_1 \frac{L}{2} + m_2 (-\frac{L}{2})}{m_R + m_1 + m_2}$, $Y_{G_Z} = \frac{m_R d + p(m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_2)}{m_R + m_1 + m_2}$

et $Z_{G_Z} = \frac{p(m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_2)}{m_R + m_1 + m_2}$

La condition (1) $\Rightarrow \begin{cases} Y_{G_Z} = 0 \\ Z_{G_Z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_2) = 0 & (a) \\ m_R d + p(m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_2) = 0 & (b) \end{cases}$

Déterminons $\vec{I}_{(O_R, Z)}$: $\vec{I}_{(O_R, Z)} = \vec{I}_{(O_R, R)} + \vec{I}_{(O_R, P_{t1})} + \vec{I}_{(O_R, P_{t2})}$

on a : $\vec{I}_{(O_R, P_{t1})} = \vec{I}_{(O_R, m_1, P_{t1})} = m_1 \begin{pmatrix} p^2 - \frac{L}{2} p \cos \theta_1 & -\frac{L}{2} p \sin \theta_1 \\ \frac{L}{4} + p^2 \sin^2 \theta_1 & -p^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \frac{L}{2} p \cos \theta_1 & \frac{L^2}{4} + p^2 \cos^2 \theta_1 \end{pmatrix}_{RR}$

De même : $\vec{I}_{(O_R, P_{t2})} = m_2 \begin{pmatrix} p^2 & \frac{L}{2} p \cos \theta_2 & \frac{L}{2} p \sin \theta_2 \\ \frac{L}{2} p \cos \theta_2 & \frac{L^2}{4} + p^2 \sin^2 \theta_2 & -p^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \frac{L}{2} p \sin \theta_2 & -p^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 & \frac{L^2}{4} + p^2 \cos^2 \theta_2 \end{pmatrix}_{RR}$

soit alors : $\vec{I}_{(O_R, Z)} = \begin{pmatrix} A_Z & -F_Z & -E_Z \\ -F_Z & B_Z & -D_Z \\ -E_Z & -D_Z & C_Z \end{pmatrix}_{RR}$ avec :

$\begin{cases} A_Z = A + \sum_{i=1}^2 m_i p^2 \\ B_Z = B + \sum_{i=1}^2 m_i (\frac{L^2}{4} + p^2 \sin^2 \theta_i) \\ C_Z = C + \sum_{i=1}^2 m_i (\frac{L^2}{4} + p^2 \cos^2 \theta_i) \\ D_Z = D + \sum_{i=1}^2 m_i p^2 \sin \theta_i \cos \theta_i \\ E_Z = E + \sum_{i=1}^2 m_i \frac{L}{2} p \sin \theta_i \\ F_Z = F + \sum_{i=1}^2 m_i \frac{L}{2} p \cos \theta_i \end{cases}$

des conditions (2) $\Rightarrow F_Z = E_Z = 0$

Ce qui se traduit par les équations :

$E + m_1 \frac{L}{2} p \sin \theta_1 - m_2 \frac{L}{2} p \sin \theta_2 = 0$ (c)

$F + m_1 \frac{L}{2} p \cos \theta_1 + m_2 \frac{L}{2} p \cos \theta_2 = 0$ (d)

Question 6 :

La résolution du système à 4 eq. (a), (b), (c) et (d) à quatre

inconnues m_1, m_2, θ_1 et θ_2 donne :

$\theta_1 = \text{Arctan} \frac{2E}{2F + m_R L d}$
 $\theta_2 = \text{Arctan} \frac{2E}{2F - m_R L d}$

$m_1 = \frac{1}{pL} \sqrt{(F + m_R \frac{L}{2} d)^2 + E^2}$
 $m_2 = \frac{1}{pL} \sqrt{(F - m_R \frac{L}{2} d)^2 + E^2}$

PREMIER PROBLEME : UNITE DE PRODUCTION D'ELEMENTS EN BETON

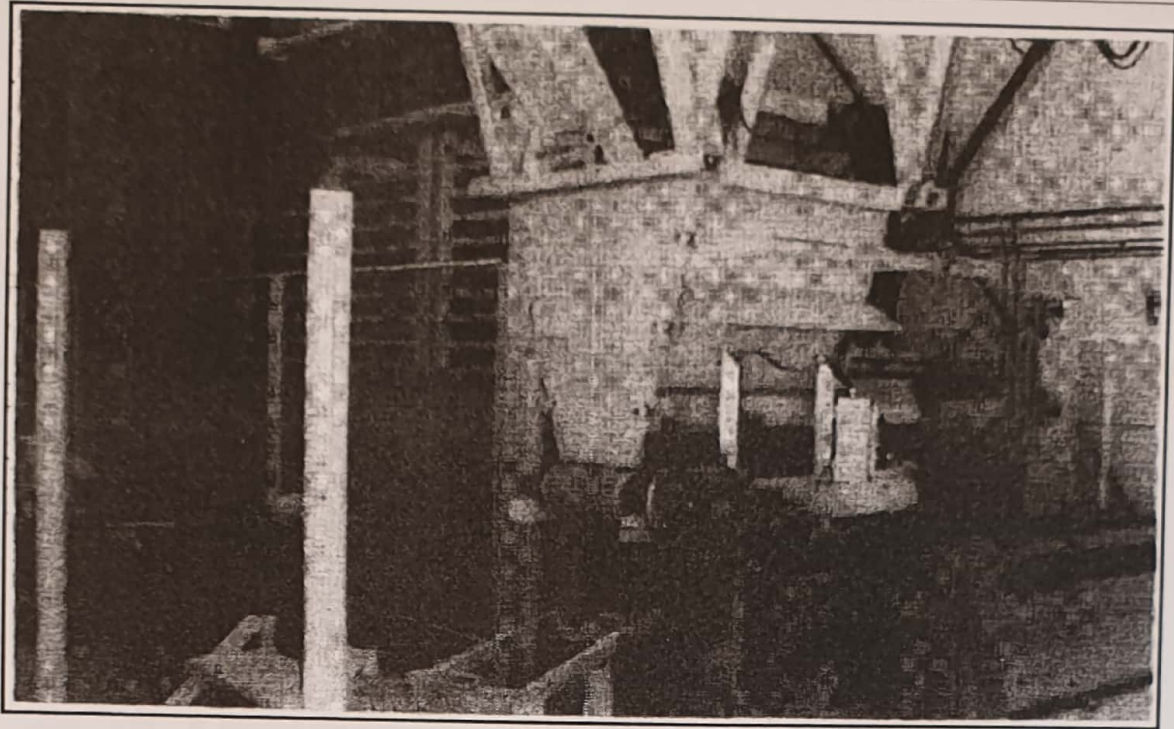


Photo : Vue d'ensemble de l'unité de production

Le système, objet de l'étude, est une unité de production d'éléments moulés en béton, tels que: dalles, margelles de piscines, pavés, etc.

Cette unité réalise trois fonctions principales : le moulage, le stockage et la palettisation.

L'introduction dans le magasin, des produits frais posés sur un plateau, est réalisée par le sous-système appelé « Table d'introduction » (cf. annexes 1 et 2 pages 3 et 4).

L'énergie de puissance utilisée est de l'énergie hydraulique. Quatre vérins hydrauliques associés par paires actionnent la règle de poussée du plateau de produits.

Dans la suite du problème on s'intéresse uniquement à une seule paire de vérins. (Annexe2)

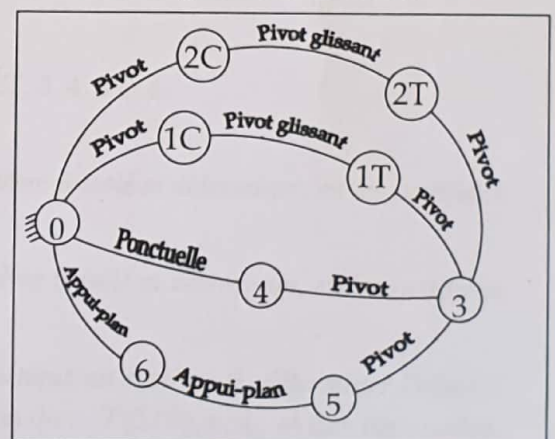
On donne ci-contre **le Graphe de structure du modèle** :

L'objectif de cette étude est de calculer l'effort à développer par les vérins pour introduire le plateau

PS (6) dans le magasin.

Le vérin 1 est considéré bloqué, seul le vérin 2 est en action.

La symétrie du système et une analyse préalable permettent de retenir le modèle plan.



Dans ce modèle on fait les hypothèses suivantes :

- Toutes les liaisons sont sans frottement sauf les liaisons galet 4/bâti 0 et plateau 6/ bâti 0 dont le coefficient de frottement commun est f .
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{y}_0$.

- Le plateau 6 de masse M_6 , en mouvement de translation/0 suivant \vec{x}_0 (paramètre: $x(t)$).
- Le bras de poussée 3 est de masse M_3 , en mouvement plan /0 (paramètre de rotation: $\alpha_3(t)$) et de matrice d'inertie :

$$J(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

- La masse des autres pièces de la table est négligeable.
- L'action du bâti 0 sur le plateau 6 est un glisseur de résultante $\vec{R}(0 \rightarrow 6) = X_{06} \cdot \vec{x}_0 + Y_{06} \cdot \vec{y}_0$.
- L'action du fluide (intercalé entre 2C et 2T) sur la tige 2T est un glisseur en B, de résultante $\vec{R}(\text{fluide} \rightarrow 2T) = F \cdot \vec{x}_2$.
- Roulement sans glissement au point E de 4/0.

Question 1 : a) Simplifier $J(G_3, 3)$ en sachant que 3 possède un plan de symétrie matérielle ($G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3$).

Déterminer en fonction de $\lambda_2, \alpha_2, \alpha_3$, et des constantes :

- b) le torseur cinétique en G_3 du bras 3 dans son mouvement par rapport à 0.
- c) l'énergie cinétique du bras 3 dans son mouvement par rapport à 0 : $T(3/0)$

Question 2 : a) Énoncer les lois de Coulomb relative au glissement dans le cas d'un contact ponctuel avec frottement entre deux solides.

b) Donner alors la relation liant les composantes X_{06} et Y_{06} . Justifier

Question 3 : a) Par application du théorème de la résultante dynamique au plateau 6, déterminer Y_{06} en fonction de M_6 et g .

b) En déduire X_{06} en fonction de M_6, g et f .

On isole le système S formé de l'ensemble des solides 1, 2C, 2T, 3, 4, 5 et 6.

Question 4 : a) Faire le bilan des actions extérieures au système S isolé et déterminer, en les justifiant, les puissances correspondantes.

b) Faire le bilan des actions intérieures au système S isolé et déterminer, en les justifiant, les puissances correspondantes.

c) Par application du théorème de l'énergie cinétique au système S , déterminer l'effort F du fluide sur la tige 2T du vérin 2 en fonction de : $T(3/0), x, \lambda_2$ et des constantes.

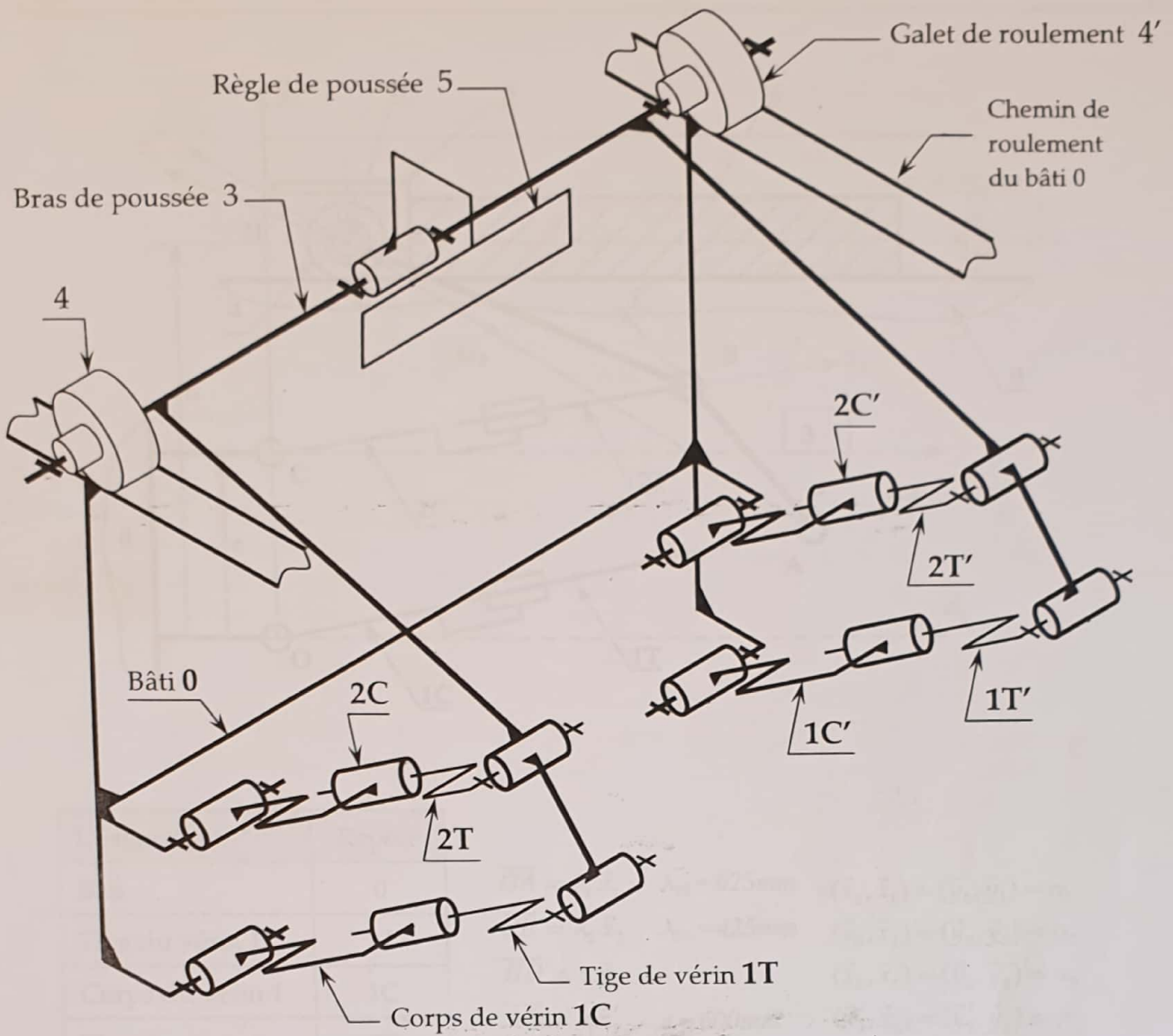
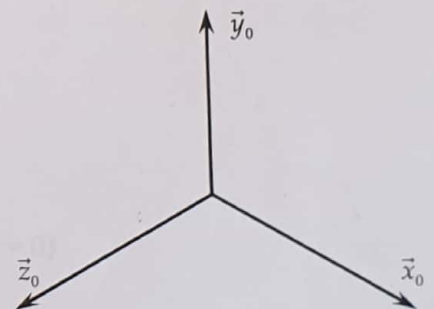
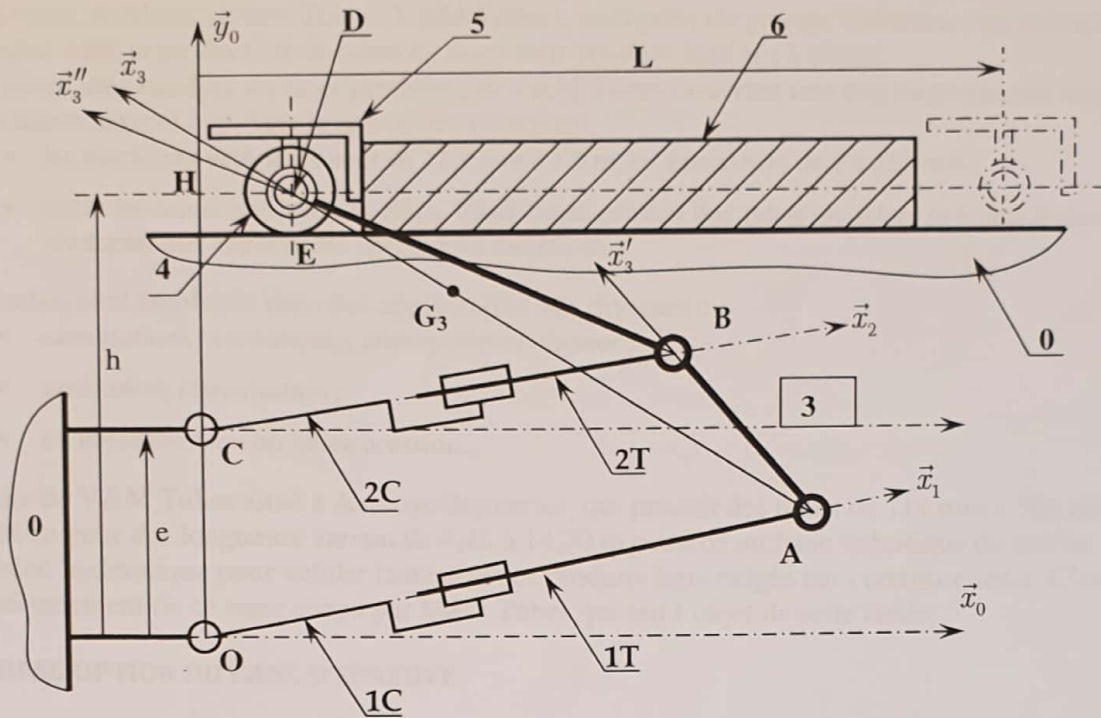


TABLEAU DE LIAISONS

Liaison	Type
Galet/Bras de poussée	Pivot
Galet/Bâti	Ponctuelle
Bras/règle de poussée	Pivot
Plateau/règle de poussée	Appui plan
Plateau/bâti	Appui plan
Corps vérin/bâti	Pivot
Tige vérin/corps vérin	Pivot glissant
Tige vérin/bras	Pivot

NB : Le plateau n'est pas représenté sur le schéma





Désignation	Repère
Bâti	0
Tige du vérin 1	1T
Corps du vérin 1	1C
Tige du vérin 2	2T
Corps du vérin 2	2C
Bras de poussée	3
Galet de roulement	4
Règle de poussée	5
Plateau	6

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \lambda_{10} \cdot \vec{x}_1 & \lambda_{10} &= 625mm & (\vec{x}_0, \vec{x}_1) &= (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha_1 \\ \overline{CB} &= \lambda_{20} \cdot \vec{x}_2 & \lambda_{20} &= 425mm & (\vec{x}_0, \vec{x}_2) &= (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \alpha_2 \\ \overline{HD} &= x \cdot \vec{x}_0 & & & (\vec{x}_0, \vec{x}_3) &= (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = \alpha_3 \\ \overline{AD} &= a \cdot \vec{x}'_3 & a &= 600mm & (\vec{x}'_3, \vec{x}_3) &= (\vec{y}'_3, \vec{y}_3) = \varphi \\ \overline{BD} &= b \cdot \vec{x}''_3 & b &= 400mm & (\vec{x}_3, \vec{x}''_3) &= (\vec{y}_3, \vec{y}''_3) = \psi \\ \overline{AB} &= d \cdot \vec{x}'_3 & d &= 210mm & \varphi \text{ et } \psi & \text{ des angles constants} \\ \overline{AG}_3 &= \rho \cdot \vec{x}_3 & \rho &= 800mm & & \\ \overline{OH} &= h \cdot \vec{y}_0 & h &= 435mm & & \\ \overline{OC} &= e \cdot \vec{y}_0 & e &= 200mm, & & \end{aligned}$$

λ_{10} et λ_{20} désignent les longueurs λ_1 et λ_2 en position initiale ($x = 0$)

Deuxième Problème : BANC D'ÉPREUVE HYDRAULIQUE

1. PRESENTATION

Vallourec & Mannesmann Tubes (V&M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

Les tubes sans soudure en acier produits par V&M Tubes couvrent une très large gamme tant sur le plan dimensionnel que dans la nature des matériaux :

- les diamètres extérieurs vont de 21,3 mm à 1,5 m, les épaisseurs de 2 à 250 mm ;
- outre les aciers non alliés et alliés, V&M Tubes produit des tubes en aciers spéciaux élaborés pour s'adapter aux applications spécifiques des clients.

Ces tubes sont employés dans des applications très diverses :

- canalisations hydrauliques, pneumatiques, vapeur ;
- ventilation, climatisation ;
- en basse pression ou haute pression...

Le site de V&M Tubes situé à Aulnoye-Aymeries, qui produit des tubes de 114 mm à 508 mm de diamètre pour des longueurs variant de 4,40 à 14,20 m possède un banc spécifique de test de pression hydraulique pour valider la qualité des produits finis exigée par certains clients. C'est le fonctionnement de ce banc conçu par M&T Tubes qui fait l'objet de cette étude.

2. DESCRIPTION DU BANC D'ÉPREUVE

Afin de valider la caractéristique de tenue en pression des tubes, ceux-ci sont soumis à une pression hydraulique donnée durant un temps spécifié. Ces paramètres dépendent de la taille des tubes et de leur future utilisation.

Le banc d'épreuve comporte 4 zones (voir annexe 1- page 11) :

- a) Zone de préparation du tube à tester (voir annexe 2 – page 12).
- b) Zone de lavage et de mise en position du tube à tester.
- c) Zone de test du tube à tester (mise sous pression).
- d) Zone d'évacuation et de stockage après test.

3. ANALYSE DE LA FONCTION « PREPARER LE TUBE » : SYSTEME « TUBE A TUBE »

Le système « tube à tube » défini en annexes 2 remplit deux fonctions :

- déstocker le tube pour le placer sur une ligne de rouleaux motorisés qui va translater le tube axialement jusqu'à la butée pour le mettre en position de référence afin de permettre la suite des opérations ;
- transférer le tube sur une rampe d'évacuation vers un ascenseur.

Le système est constitué de trois vérins pneumatiques qui, par l'intermédiaire de leviers, provoquent la rotation d'un arbre relié aux 5 basculeurs qui vont déplacer le tube (figure 1ci-dessous).

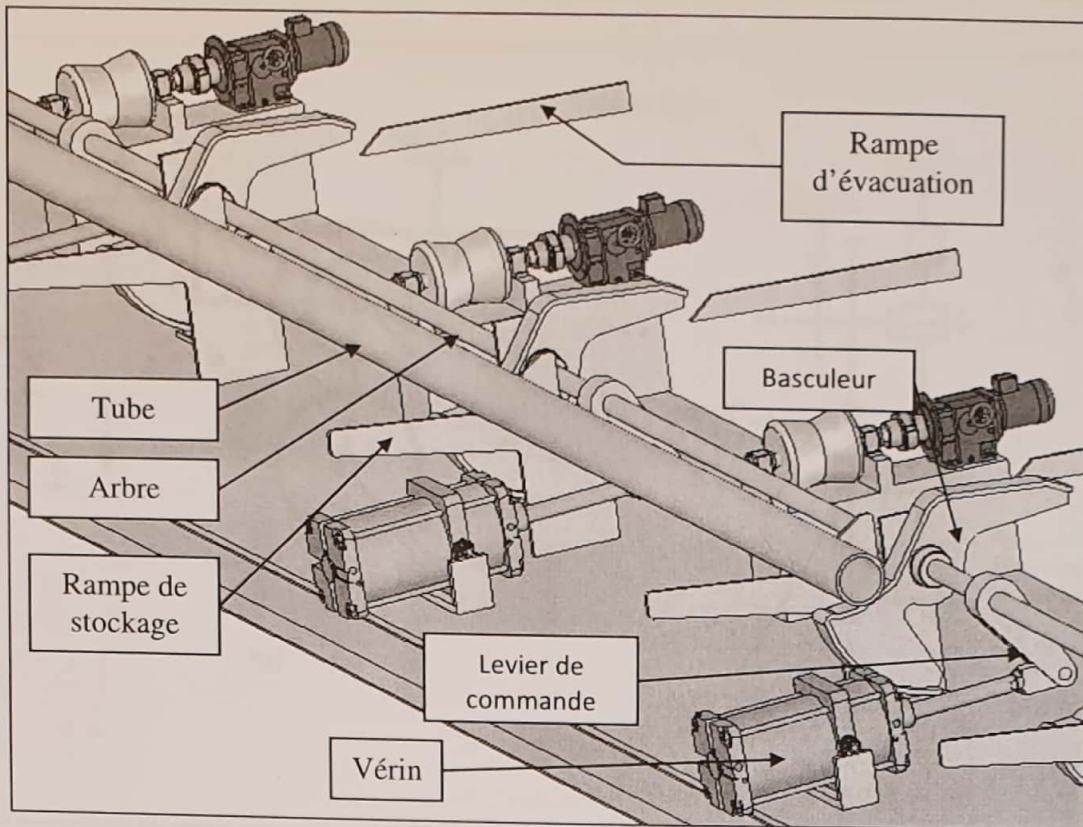


Figure 1.

Lors des différentes phases de travail du « tube à tube », il se produit un transfert du poids du tube sur le basculeur et les différents éléments de soutien du tube.

Les schémas de la Figure 2 ci-dessous, représentent les quatre phases de ce transfert de charge.

- Position I : début de la prise en charge du tube par le basculeur sur la rampe de stockage.
- Position II : le tube est déposé sur les galets moteurs.
- Position III : début d'évacuation du tube vers la rampe d'évacuation.
- Position IV : fin d'évacuation, le tube va quitter le basculeur pour la rampe d'évacuation.

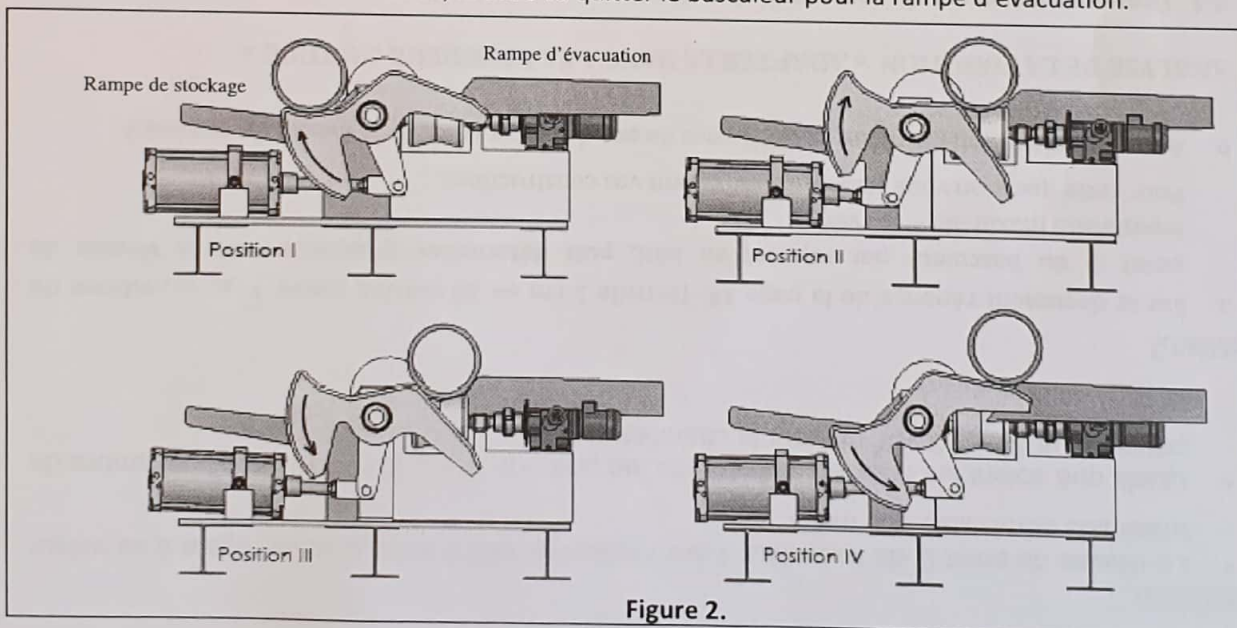


Figure 2.

3.1. Modèle d'étude

Le schéma cinématique proposé pour l'étude est donné par les figures de l'annexe 3 (page 13).

On y retrouve :

- le bâti 0,
- le corps de vérin 3,
- la tige de vérin 2,
- le basculeur 1 composé du levier de commande, de l'arbre et du basculeur.

3.2. Détermination des sections

Les hypothèses de répartition de charges uniformes sur tous les éléments permettent de ramener l'étude à un problème plan constitué d'un seul vérin et d'un seul basculeur recevant un tiers du poids total du tube.

Les figures 2 et 3 de l'annexe 3 (page 13), représentent les deux positions donnant les charges maximales appliquées à la tige de vérin dans les deux sens de déplacement. Elles correspondent aux positions I et IV de la figure 2 page 6.

Dans ces deux cas, les pièces 1, 2 et 3 ont la même position (fin de course tige de vérin sortie), seule la position du tube sur le basculeur est différente. Cette situation correspond à la position extrême du basculeur : $\theta = \theta_0 = 35^\circ$.

Les hypothèses sont les suivantes :

- les accélérations sont suffisamment faibles pour traiter le problème en statique,
- la répartition uniforme des charges permet de faire l'étude dans le plan des figures,
- le poids total du tube se répartit sur les 3 vérins, on prendra donc $\frac{1}{3}\vec{P} = -\frac{P}{3}\vec{y}_0$ la contribution du poids pour l'étude d'équilibre du système, appliquée en G. Le poids des autres pièces est négligé,
- on se place dans la situation la plus défavorable, le poids du tube est entièrement supporté par le basculeur,
- les liaisons sont supposées sans frottement.

Question 1 En précisant clairement les systèmes isolés, exprimer l'effort appliqué par la tige de vérin 2 sur le basculeur 1 en fonction de R , θ_0 et des coordonnées de G (x_G et y_G). Le calculer pour chacune des deux positions étudiées.

La pression d'alimentation des vérins est 3 bars.

Question 2 Déterminer les sections minimales des chambres de poussée et de tirage, notées respectivement S_1 et S_2 , pour obtenir l'effort nécessaire.

3.3. Réglage du débit

Pour limiter les effets dus aux accélérations lors du déplacement du tube, la norme de la vitesse du point D, point de contact basculeur/tube, doit rester inférieure à 80 mm/s. On se propose de déterminer le réglage du débit correspondant.

Le document réponse (page 14) représente à l'échelle 1/8 le système « tube à tube » et la position du point D dans le cas le plus défavorable (position IV de la Figure 2 page 6).

Hypothèses :

- La vitesse du point D du basculeur 1 par rapport au bâti 0 est supposée égale à sa valeur maximale admissible : 80 mm/s
- Quels que soient les résultats précédents, on prendra $S_1 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ pour la chambre de poussée, et $S_2 = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ pour la chambre de tirage.

Question 3

- Sur le document réponse de la page 14 (échelle 1 cm \leftrightarrow 20 mm/s), tracer $\vec{V}_{(D \in 1/0)}$, vitesse du point D du basculeur par rapport au bâti, puis déterminer graphiquement la vitesse de translation maximale \dot{x} du vérin.
Pour cette question vous justifierez clairement vos constructions.
- A quelle valeur doit-on régler le débit pour ne pas dépasser la vitesses maximale requise ?

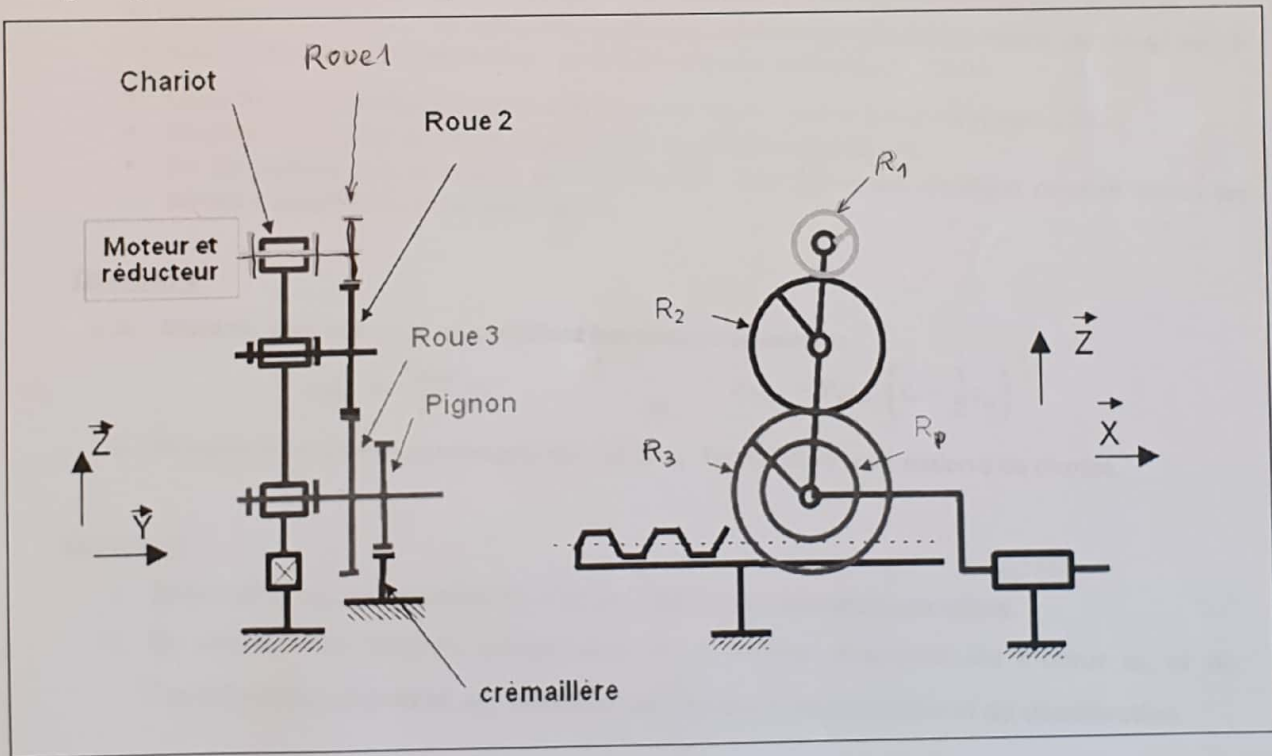
4. ANALYSE DE LA FONCTION « ADAPTER LE BANC A LA LONGUEUR DU TUBE »

4.1. Dimensionnement du moteur hydraulique

L'objectif de cette partie est de déterminer la vitesse maximale du moteur du chariot arrière ainsi que le couple moteur nécessaire afin de pré-dimensionner celui-ci.

Un schéma cinématique simplifié du chariot arrière, ainsi que les grandeurs cinématiques et cinétiques, sont donnés ci-dessous.

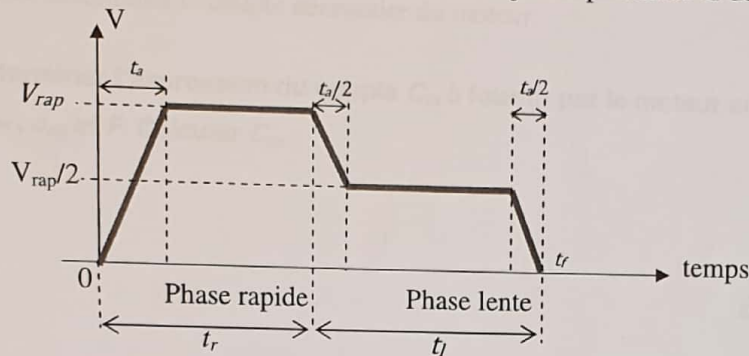
La chaîne de puissance comporte un moteur hydraulique, un réducteur roue et vis sans fin, un réducteur à engrenages parallèles et un système pignon-crémaillère.
Le guidage du chariot est modélisé par une glissière.



pièces	Inertie (kg.m ²)	Données cinématiques
moteur	$I_m = 0,0012$	
Réducteur roue et vis sans fin	$I_r = 0,004$ (ramenée à l'arbre moteur)	Rapport de réduction $r = 1/30$
Roue 1	négligeable	$R_1 = 50\text{mm}$
Roue 2	négligeable	$R_2 = 105\text{mm}$
Roue 3 et pignon	négligeable	roue 3 : $R_3 = 115\text{mm}$ pignon : $R_p = 85\text{mm}$

La masse totale en translation de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot} + \text{moteur} + \text{réducteur} + \text{roues}\}$ est $M = 2350\text{ Kg}$.

On note C_m le couple moteur, ω_m sa vitesse de rotation par rapport au bâti, et V la vitesse du chariot. La loi de vitesse du chariot pendant la totalité du trajet est présentée ci-dessous :



- On note t_r la durée de la phase de déplacement rapide, t_l la durée de la phase lente, t_t la durée totale, t_a la durée de la phase d'accélération. Chacune des 2 phases de décélération dure $t_a/2$.
- La course du chariot arrière pendant la phase de déplacement en vitesse rapide (de 0 à t_r) est de $C_{rap} = 6,24\text{ m}$, et pendant la phase en vitesse lente (de t_r à t_t) $C_{lent} = 1,56\text{ m}$.
- La durée maximale du déplacement total (phase rapide + phase lente) est limitée à 20 s.
- La vitesse du chariot, lors de la phase rapide, V_{rap} est limitée à 0,5 m/s.
- On considérera que le module de l'accélération a du chariot est identique pendant toutes les phases d'accélération et de décélération.

Question 4

- a. Montrer alors que t_a , t_l et t_r vérifient les relations suivantes :

$$C_{lent} = \frac{V_{rap}}{2} \cdot t_l \quad \text{et} \quad C_{rap} = V_{rap} \cdot \left(t_r - \frac{1}{2} t_a \right)$$

- b. En déduire les valeurs numériques de t_r et de t_a . En déduire l'accélération a du chariot.

Question 5

- a. Déterminer ω_m en fonction de V et des données cinématiques utiles.
- b. En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur ω_m et de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_m$ pendant les phases d'accélération et de décélération.

Question 6

- a. Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble Σ par rapport au référentiel galiléen bâti.
- b. En déduire l'expression de l'inertie équivalente de cet ensemble ramenée à l'axe de sortie du moteur, notée J_{eq} en fonction de M , I_m , I_r et des données cinématiques utiles. Application numérique.

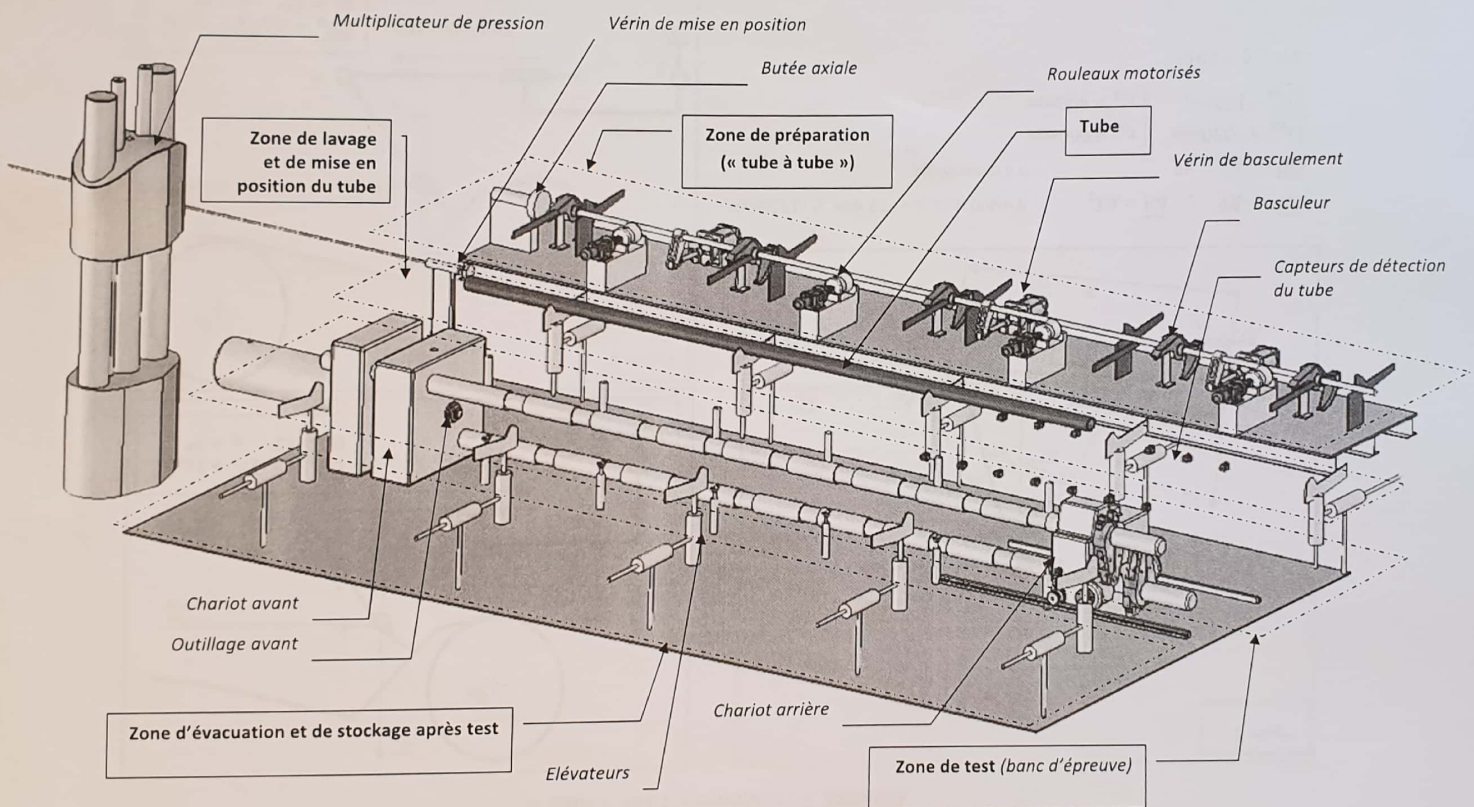
- Les efforts résistants sur le chariot sont modélisés par un glisseur F d'amplitude 500N.
- Le rendement de l'ensemble du mécanisme (réducteur roue et vis sans fin, réducteur à axes parallèles) est $\eta = 0,3$.
- Quelles que soient les valeurs précédemment trouvées, on prendra une accélération angulaire maximale du moteur $\dot{\omega}_m$ égale à 250 rad/s^2 et une inertie totale équivalente ramenée à l'arbre moteur J_{eq} égale à $0,01 \text{ kg.m}^2$.

On se propose de déterminer le couple nécessaire du moteur.

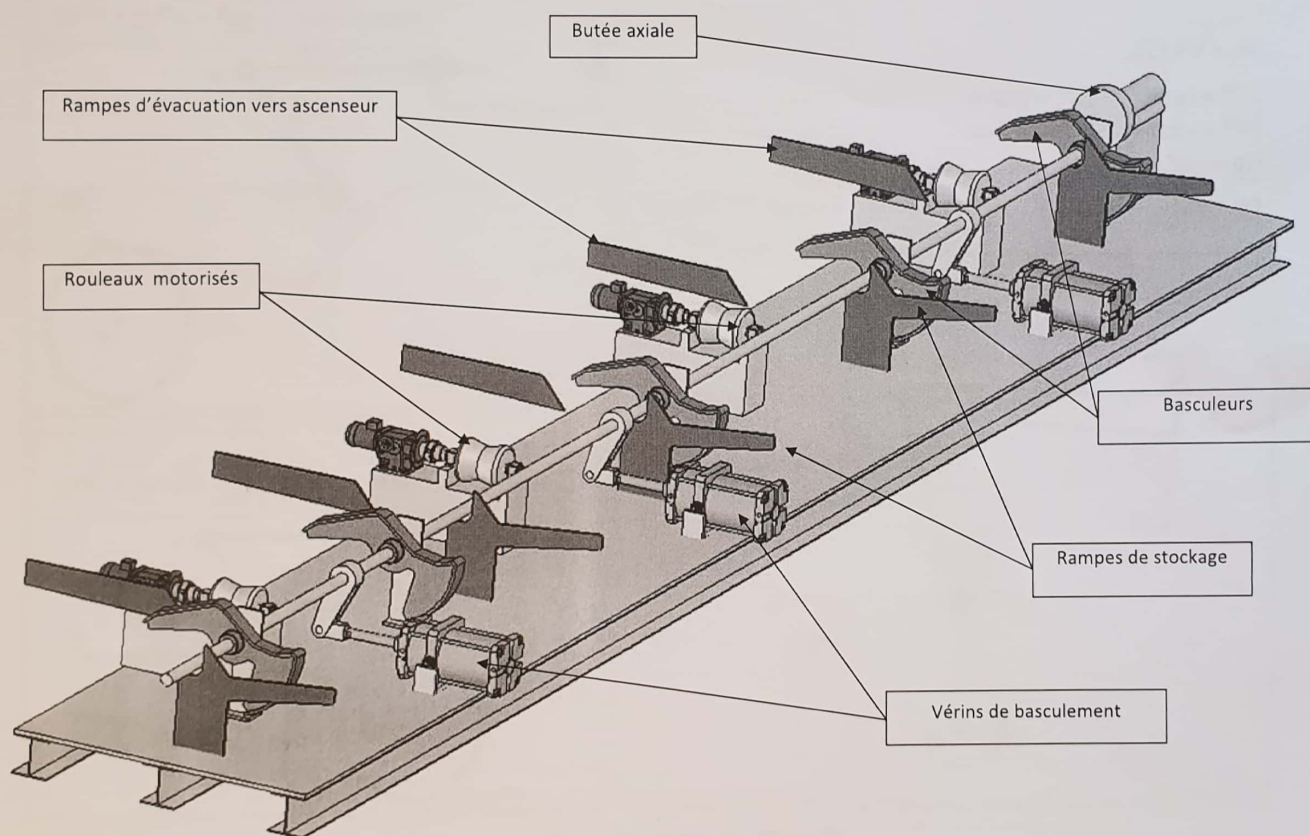
Question 7 Déterminer l'expression du couple C_m à fournir par le moteur en fonction de $\dot{\omega}_m$, J_{eq} et F . Calculer C_m .

Fin de l'énoncé

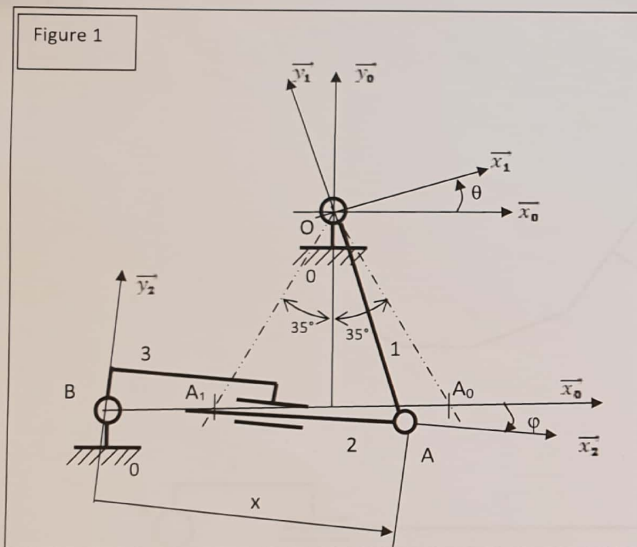
ANNEXE 1 : Banc d'épreuve (tube en zone de lavage et mise en position)



ANNEXE 2 : Zone de préparation du tube (le tube n'est pas représenté)



ANNEXE 3 : Système « Tube à tube »

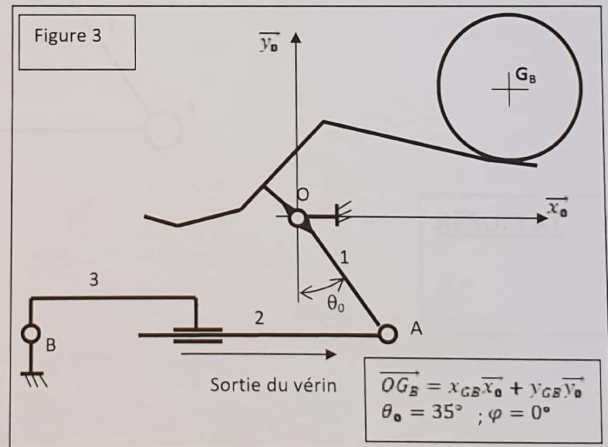
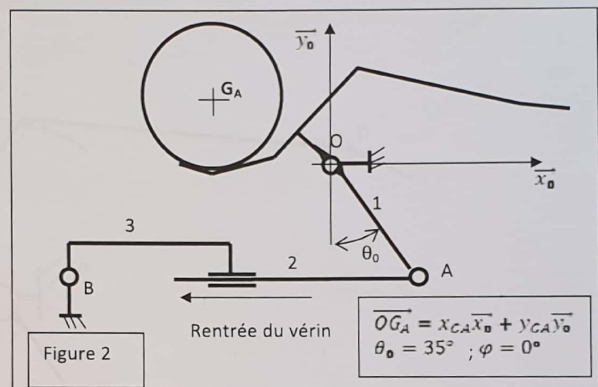


$$\vec{OA} = -R\vec{y}_1 \quad ; \quad \vec{BA} = x\vec{x}_2 \quad R = 400 \text{ mm}, d = 732 \text{ mm}, P = 1200 \text{ daN},$$

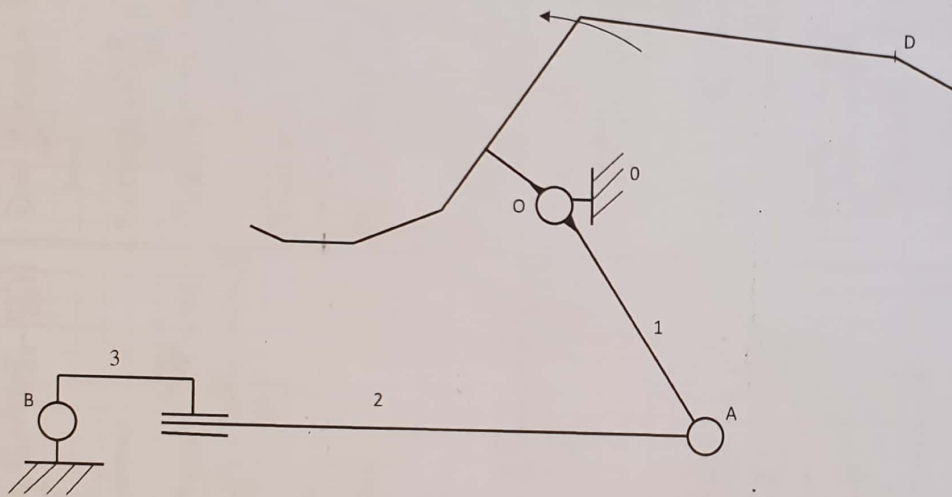
$$\vec{OB} = -h\vec{y}_0 - d\vec{x}_0 \quad h \text{ à déterminer}$$

$$\begin{cases} x_{GA} = -350 \text{ mm} \\ y_{GA} = 180 \text{ mm} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{GB} = 660 \text{ mm} \\ y_{GB} = 400 \text{ mm} \end{cases}$$

$$-35^\circ \leq \theta \leq +35^\circ$$



Question 3



Echelle de vitesse : 1 cm \leftrightarrow 20 mm/s

RESULTAT
 $\dot{x} =$ mm/s

PROBLEME 1

1] a) $\Rightarrow \vec{I}_{(G_3, 3)} = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix} (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

b) $\Rightarrow \vec{R}_{\alpha(3|0)} = \frac{M}{3} (\lambda_2 \alpha_2 \vec{y}_2 + \lambda_2 \alpha_2^2 \vec{x}_2 + \frac{\alpha_3}{3} (p \vec{y}_3 - d \vec{y}_3'))$
 $\vec{C}_{(G_3, 3|0)} = C_3 \alpha_3 \vec{x}_3$

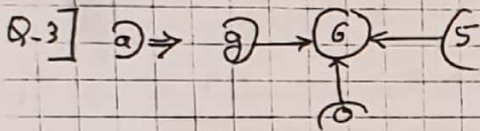
c) $\Rightarrow \vec{n}_{(3|0)} = \alpha_3 \vec{x}_3$ donc:

et $\vec{T}_{(3|0)} = \frac{1}{2} [\vec{n}_{(3|0)} \cdot \vec{C}_{(G_3, 3|0)} + M_3 \vec{V}_{(G_3, 3|0)}^2]$

donc: $T_{(3|0)} = \frac{1}{2} [M_3 (\lambda_2^2 + \lambda_2^2 \alpha_2^2) + [C_3 + M_3 (d^2 + p^2 - 2dp \cos \varphi)] \alpha_3^2]$

2] a) \Rightarrow cours 1^{ere} année

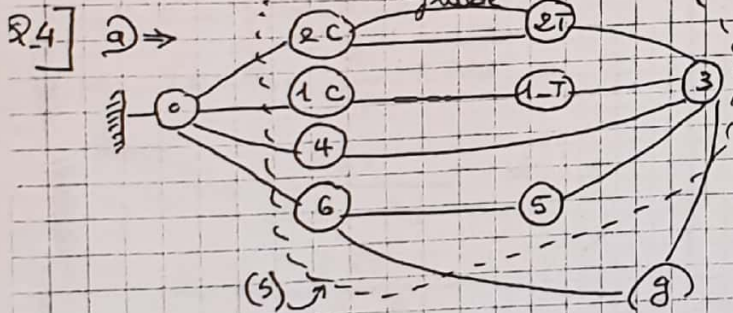
b) $\Rightarrow x_{OG} = -f y_{OG}$



$\vec{y}_0 \cdot \vec{R}_{(G|0)} = \vec{y}_0 \cdot \vec{R}_{(0 \rightarrow G)} + \vec{y}_0 \cdot \vec{R}_{(5 \rightarrow G)} + \vec{y}_0 \cdot \vec{R}_{(g \rightarrow G)}$

Donc: $y_{OG} = + M_G g$

b) $\Rightarrow x_{OG} = - \frac{f \cdot M_G \cdot g}{\dots}$



$P_{(5 \rightarrow 5|0)} = P_{(0 \rightarrow 6|0)} + P_{(g \rightarrow 3|0)}$
 Les autres P sont nulles

Ce qui donne:

$P_{(5 \rightarrow 5|0)} = -f M_G g x - M_3 g [\lambda_2 \sin \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_3 (-d \cos(\alpha_3 - \varphi) + p \cos \alpha_3)]$

b) $\Rightarrow P_{int} = P_{(2C \leftrightarrow 2T)}^{fluide}$: les autres sont nulles

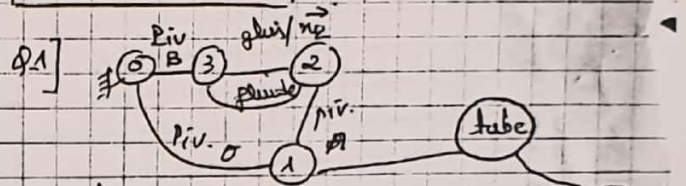
$P_{int} = P_{(2C \rightarrow 2T/2C)}^{fluide} = F \cdot \lambda_2$

c) $\Rightarrow \frac{d}{dt} T_{(4|0)} = P_{ext} + P_{int}$

Donc:

$F = M_6 (fg + \ddot{x}) \frac{x}{\lambda_2} + \frac{1}{2 \lambda_2} \frac{d}{dt} T_{(3|0)} + M_3 g [\lambda_2 \sin \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_2^2 \cos \alpha_2 + \alpha_3 (-d \cos(\alpha_3 - \varphi) + p \cos \alpha_3)]$

PROBLEME 2



On isole 3+2:
 TRS $\Rightarrow \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)}$ est porté par $(A, \vec{x}_2) = (AB)$
 On isole la tige de Veun 2

TRS / \vec{x}_2 :

$\vec{x}_2 \cdot \vec{R}_{(3 \rightarrow 2)}^{fluide} + \vec{x}_2 \cdot \vec{R}_{(fl \rightarrow 2)} + \vec{x}_2 \cdot \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = 0$

Donc: $\vec{x}_2 \cdot \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = -F_{fluide}$
 sera noté: X_A

On isole 1 + tube

TMS au O / \vec{z}_0 :

$R \cdot X_A \cos \theta - \frac{P}{3} X_G = 0$

Donc: $F_{fluide} = -X_A = \frac{P \cdot X_G}{3 R \cos \theta}$

1^{ere} position $x_G = x_{G_A}$ et $\theta = \theta_0$

F_{fluide} rentrée = -4273N

2^{de} position $x_G = x_{G_B}$ et $\theta = \theta_0$

F_{fluide} sortie = 8057N

$$S_{pauvres} = \frac{F_{fluide portee} \approx 26857 \text{ mm}^2}{P}$$

$$S_{trape} = \frac{F_{fluide neutree} \approx 14242 \text{ mm}^2}{P}$$

2] a) $\vec{v}(AE1|0) \perp \text{en } D \vec{a}(0D)$ ↑ sens du mvt

$\vec{v}(AE2|0) = \vec{v}(AE1|0) \perp \text{en } A \vec{a}(0A)$

on applique l'équiproj. pour trouver $\vec{v}(AE2|0)$

la composition donne:

$$\vec{v}(AE2|0) = \underbrace{\vec{v}(AE2|3)}_{\text{porter par } (AB)} + \underbrace{\vec{v}(AE3|0)}_{\perp \text{ en } A \vec{a}(AB)}$$

on construit la somme et on déduit:

$$\vec{v} = \|\vec{v}(AE2|3)\| \approx 48 \text{ mm/s}$$

$$\Rightarrow Q = S \cdot v_{pauvres} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

1] a) \Rightarrow Coefficient d'axe entre la courbe et l'axe des temps.

b) $\Rightarrow t_r = t_f - t_l = t_f - \frac{e \cdot C_{ent}}{v_{rap}} \approx 13,76 \mu\text{s}$

$t_a = 2,56 \mu\text{s}$

$a = 0,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

5] a) $\Rightarrow v = R_p \cdot \frac{R_1}{R_3} \cdot r \cdot \omega_m$

donc:

$$\omega_m = \frac{v R_3}{r \cdot R_p \cdot R_1} \text{ et}$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\dot{v} R_3}{r \cdot R_p \cdot R_1}$$

A.N: $\omega_m = -406 \text{ rad/s}$

$\dot{\omega}_m = -158,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

6] a) $\Rightarrow T(z|0) = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} [I_m \omega_m^2 + I_f \omega_m^2]$

b) $\Rightarrow J_{exp} = M \frac{r^2 R_p R^2}{R_3^2} + I_m + I_f \approx 9,00877 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Q7] TEC a z|0:

$$\frac{d}{dt} T(z|0) = P_{ext} + P_{int}$$

↓ $FV + C_m \omega_m$

↓ $C_m \omega_m (\eta - 1)$

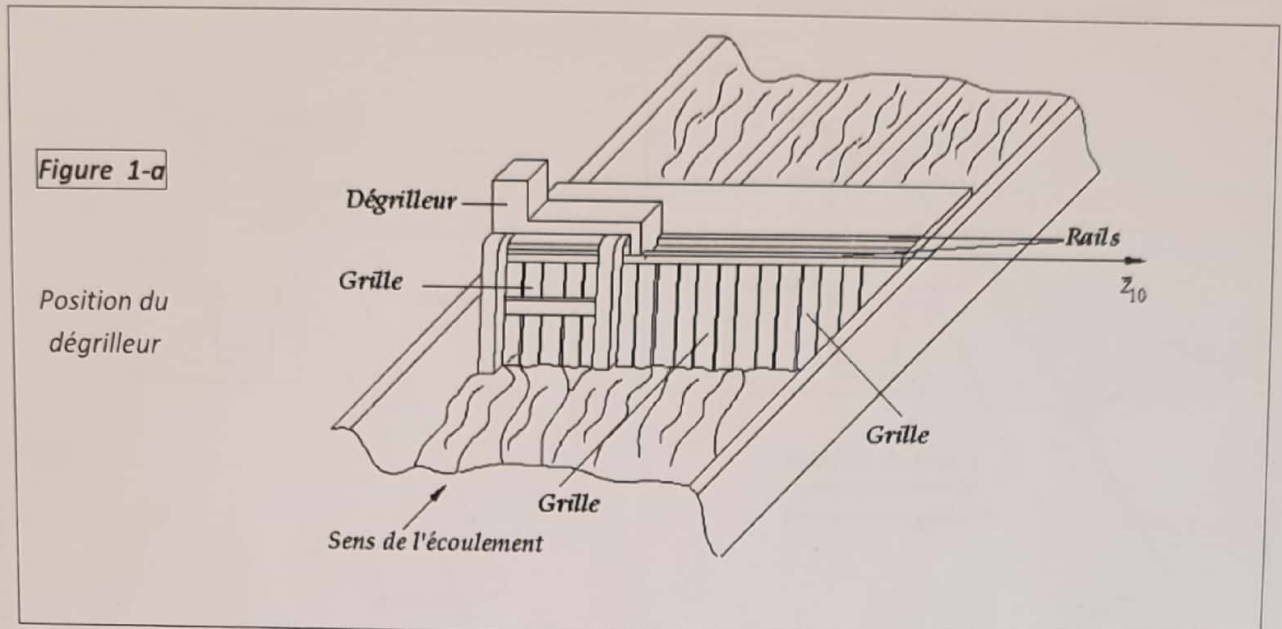
Jexp. ω_m $\dot{\omega}_m$

d'où: $C_m = \frac{1}{\eta} \left(J_{exp} \dot{\omega}_m + \frac{F \cdot r \cdot R_p \cdot R_1}{R_3} \right)$

$C_m \approx 10,4 \text{ m} \cdot \text{N}$

Premier Problème : DEGRILLEUR

L'eau qui alimente les centrales hydroélectriques de montagne provient d'une conduite forcée d'un barrage. L'eau collectée est souvent polluée par la présence de feuilles, branchages. Ces polluants peuvent entraîner une dégradation des pales de la turbine. Il est alors nécessaire d'installer une grille, en amont, pour filtrer l'eau. Se pose alors le problème de l'accumulation des déchets sur la grille.



Toute obstruction (même partielle) de celle-ci réduit la vitesse de l'écoulement de l'eau et fait chuter le rendement de l'installation.

Le dégrilleur étudié dans ce sujet a pour fonction de : **Nettoyer périodiquement la grille.**

Description du dégrilleur

Le dégrilleur est constitué par :

- * Un châssis mécano-soudé (10) pouvant translater le long de la direction \bar{z}_{10} grâce à un moteur hydraulique et un système pignon-crémaillère.
- * Un bras de guidage (4) : il est en liaison pivot avec le châssis (10) au point O_1 . Son mouvement est commandé par le vérin (8).
- * Un godet (5) : il est en liaison glissière avec le bras (4) par l'intermédiaire de galets et glisse sur la grille grâce à un moteur et un système pignon-chaîne.
- * Une trémie : elle récupère les déchets qui seront évacués par un tapis roulant.

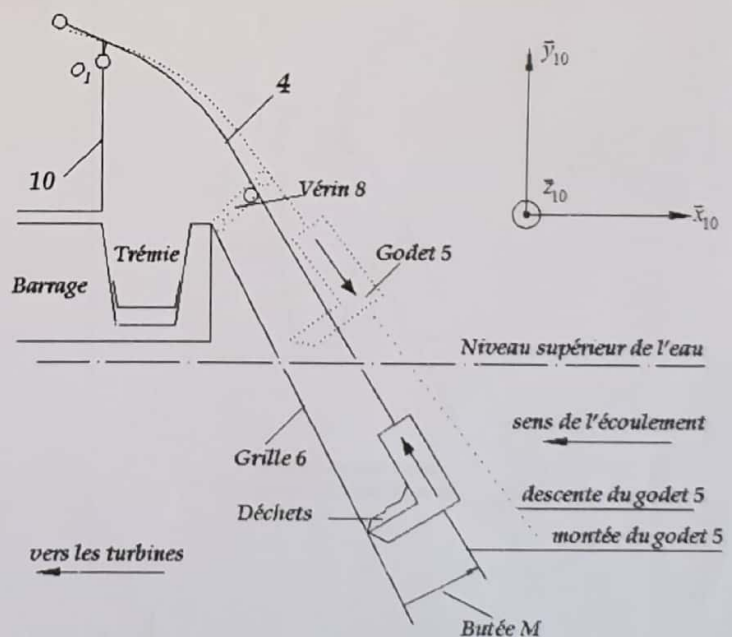


Figure 1-b : Schéma d'implantation

Fonctionnement

Figure 2-a : Position repos :

- Le godet est en position haute. Le bras 4 est en butée au point M

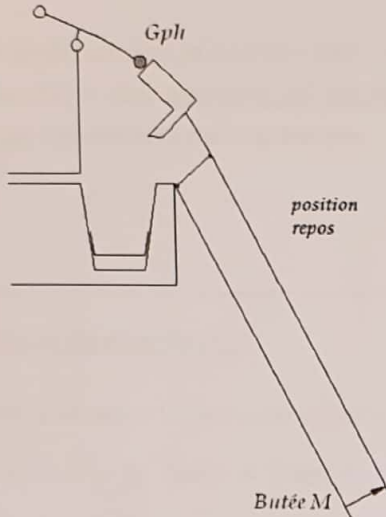


Figure 2-b : Position de descente du godet :

- L'action du vérin (8) sur (4) provoque la rotation de 4 autour de O1, jusqu'à la position de fin de sortie du vérin(8).



Figure 2-c : Descente du godet

- Un moteur hydraulique commande la descente du godet par l'intermédiaire d'un système pignon chaîne (il n'y a pas de contact entre la grille et le godet pendant la descente).

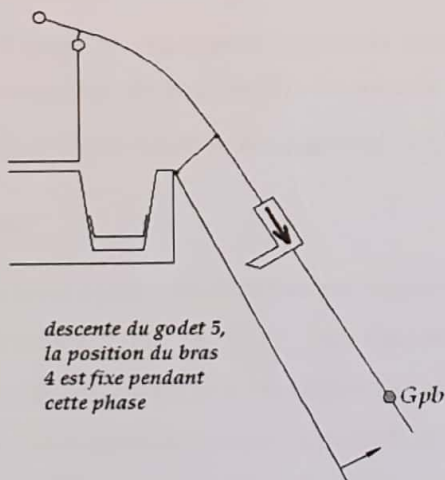


Figure 2-d :

- Le vérin 8 exerce un effort sur le bras 4 servant à le plaquer sur la butée M.

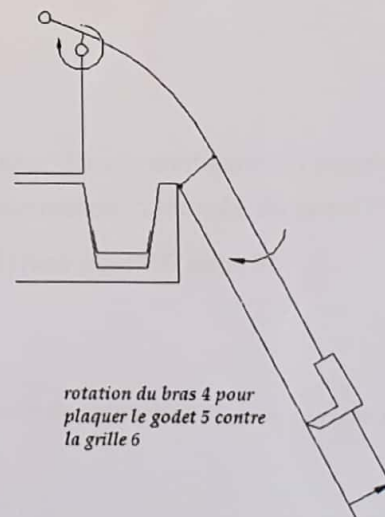
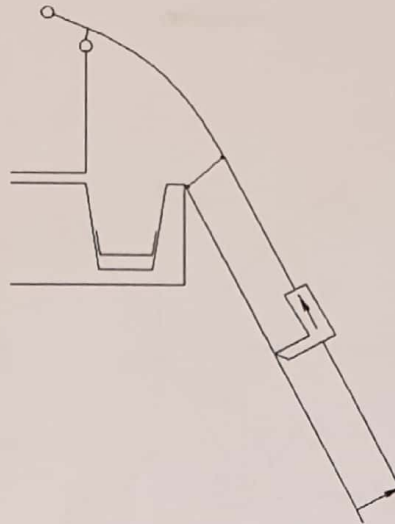


Figure 2-e : Nettoyage de la grille

- Le godet, au cours de la montée, racle la grille 6 et évacue en fin de course les déchets dans la trémie.



Lorsque le godet atteint la position G_{ph} : (godet en position haute) il doit attendre 60 secondes pour l'évacuation des déchets dans la trémie.

Etude dynamique du dégrilleur :

On se met dans la situation la plus contraignante pour le vérin (8), à savoir dé-plaquer le godet (5) (chargé et en position basse) de la grille (6). La **figure 3** (page 4) représente le schéma cinématique du dégrilleur dans une situation. Le support (10) est fixe. La liaison glissière entre le godet (5) et le bras (4) est bloquée, en position basse.

Dimensionnement du vérin 8

Question 1 : Déterminer l'expression de la projection sur \vec{z}_{10} du moment dynamique en O_1 de l'ensemble $S = \{4, 5\}$ par rapport au châssis (10).

Question 2 : Par application du théorème du moment dynamique, déterminer l'expression littérale de l'effort F que devra fournir le vérin (8) sur l'ensemble $S = \{4, 5\}$ en fonction de F_p , des caractéristiques d'inertie, des paramètres géométriques, de l'angle (ψ) et de ses dérivées.

Dimensionnement du moteur hydraulique 15 :

La **figure 4** (page 5) représente le schéma cinématique du dégrilleur dans la configuration correspondante à la phase de nettoyage de la grille (6). Un moteur hydraulique (15) commande la montée du godet (5) par rapport au bras (4) par l'intermédiaire des pignons (9), (11) et la chaîne (3) (**voir figure 5- page 5**).

Hypothèses :

- Le bras (4) est considéré fixe par rapport à 0 dans cette phase de mouvement. $\psi = \text{constante}$
- Le repère $R_4 (O_{11}; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_{10})$ est supposé **galiléen**.
- Pas de glissement entre la chaîne (3) et les pignons (9) et (11) .
- Aucun mouvement entre les déchets et le godet (5).
- L'**équilibre dynamique** des solides en rotation est parfaitement réalisé.
- Le galet (12) roule sans glisser sur 0 en J . Le contact est supposé avec frottement.

* $R_{10}(O_1; \bar{x}_{10}, \bar{y}_{10}, \bar{z}_{10}) =$ repère lié au support (10),
supposé galiléen.

* $(O_1, \bar{z}_{10}) =$ axe de la liaison pivot parfaite entre le support (10) et le bras (4).

* L'action du vérin (8) monté entre (10) et (4) est modélisée par un glisseur en D ;

$$\vec{R}(8 \rightarrow 4) = F \cdot \bar{y}_8$$

$$\overline{O_1 G_5} = -y_5 \cdot \bar{y}_4 - x_5 \cdot \bar{x}_4 ; \quad \overline{O_1 G_4} = -y_4 \cdot \bar{y}_4 ;$$

$$\overline{CD} = \lambda \cdot \bar{y}_8 ; \quad \overline{O_1 D} = -\mu \cdot \bar{y}_4 ;$$

* I_4 : le moment d'inertie de (4) par rapport à l'axe (O_1, \bar{z}_{10}) . m_4 : masse du bras (4).

* I_5 : le moment d'inertie de (5) par rapport à l'axe (G_5, \bar{z}_{10}) . m_5 : la masse du godet (5).

* L'action de l'eau sur le bras (4) due au courant est modélisée par un glisseur $\vec{F}(Eau \rightarrow 4) = -F_p \cdot \bar{x}_4$ appliqué au point P avec $\overline{O_1 P} = -y_p \cdot \bar{y}_4$

- L'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \cdot \bar{y}_{10}$.

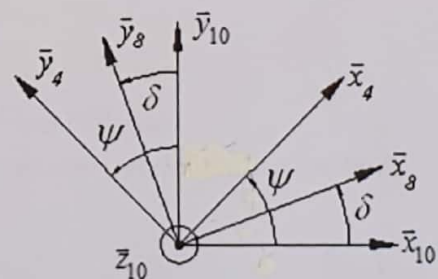
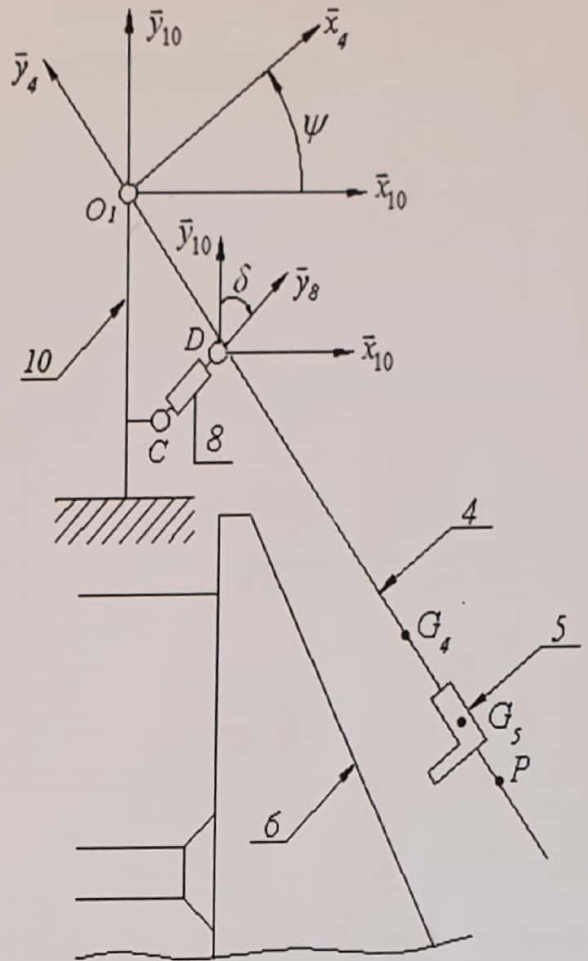


Figure 3

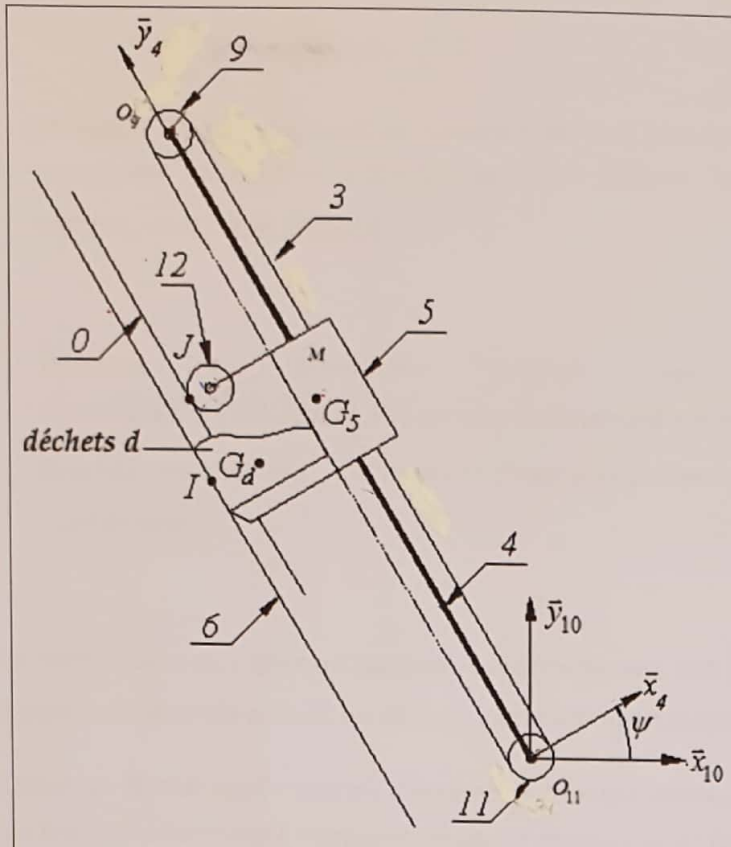


Figure 4

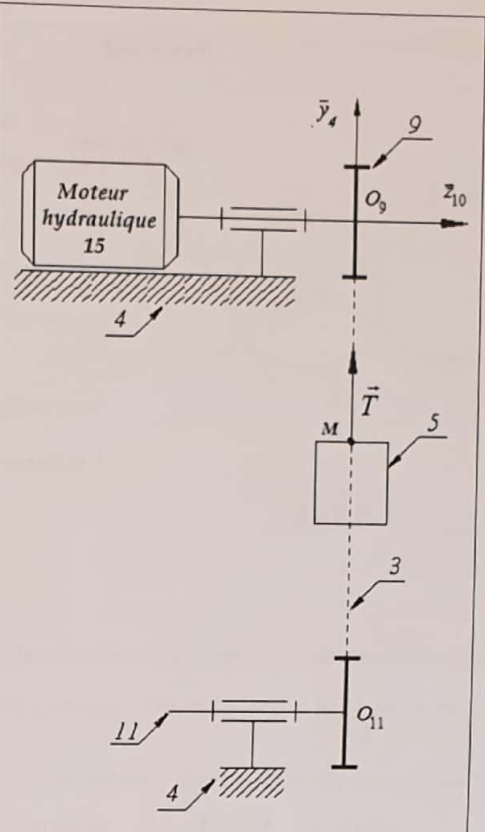


Figure 5

Données :

- I_{12} : Moment d'inertie du galet 12 par rapport à l'axe (O_{12}, \bar{z}_{10}) . m_{12} : Sa masse. O_{12} son centre d'inertie. r : Son rayon
- Les roues 9 et 11 sont identiques, de rayons R , de moment d'inertie par rapport à leurs axes de rotation est $I = I_9 = I_{11}$.
- Le godet (5), de masse m_5 , est en liaison glissière parfaite avec le bras (4) de direction \bar{y}_4 (le paramètre du mouvement de translation est $y, \overline{O_{11}G_5} = -x_5 \cdot \bar{x}_4 + y \cdot \bar{y}_4$).
- La masse de la chaîne (3) est négligeable.
- La liaison 9/4 est pivot parfaite d'axe (O_9, \bar{z}_{10}) . On donne $\bar{\Omega}_{9/4} = \omega_m \cdot \bar{z}_{10}$.
- La liaison 11/4 est pivot parfaite d'axe (O_{11}, \bar{z}_{10}) . On donne $\bar{\Omega}_{11/4} = \omega_{11} \cdot \bar{z}_{10}$.
- La liaison 12/5 est pivot parfaite d'axe (O_{12}, \bar{z}_{10}) . On donne $\bar{\Omega}_{12/5} = \omega_{12} \cdot \bar{z}_{10}$.
- Les déchets sont assimilés à un solide indéformable (d) de masse m_d et de centre d'inertie G_d .
- L'accélération de la pesanteur $\bar{g} = -g \cdot \bar{y}_{10}$.
- L'action du moteur (15) sur le pignon (9) est représentée par le torseur $\{T_{moteur} \rightarrow 9\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_m \cdot \bar{z}_{10} \end{Bmatrix}_{O_9}$.
- L'action de la chaîne (3) sur le godet (5) est représentée par le torseur $\{T_3 \rightarrow 5\} = \begin{Bmatrix} \bar{T} = T \cdot \bar{y}_4 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_M$.

Question 3 : En exprimant la condition de non glissement en J, déterminer la relation entre ω_{12} , r et y , en déduire la relation entre ω_{12} et ω_m . Voir Figure 6.

Question 4 : Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{9, 3, 5, d, 11, 12\}$ dans son mouvement par rapport au bras (4), en déduire J_{eq} , le moment d'inertie équivalent ramené à l'axe moteur.

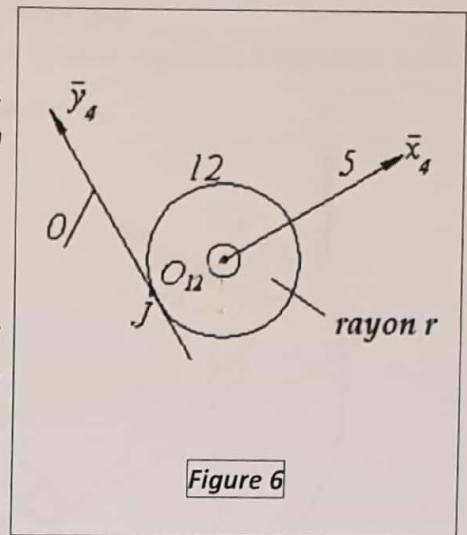


Figure 6

Le contact déchets / grille est supposé, avec frottement. Soit T_{6d} la résultante des actions tangentiels dues aux frottements entre la grille et les déchets (cette action est supposée connue). On note $m_E = m_5 + m_d + m_{12}$

Question 5 : Par application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble Σ dans son mouvement par rapport au bras (4) déterminer l'expression du couple moteur C_m en fonction de ω_m , J_{eq} , T_{6d} , m_E , g , R et ψ .

On suppose que l'action due au frottement entre 0 et la roue 12 est négligée (figure 7).

On donne f le coefficient de frottement entre la grille et les déchets. N_{6d} : l'action normale du contact des déchets avec la grille.

Question 6 : Justifier que : $T_{6d} = -f N_{6d}$

Question 7 : Par application du théorème de la résultante dynamique à l'ensemble $E = \{5, d, 12\}$ en projection sur \bar{y}_4 , déterminer l'expression de N_{6d} .

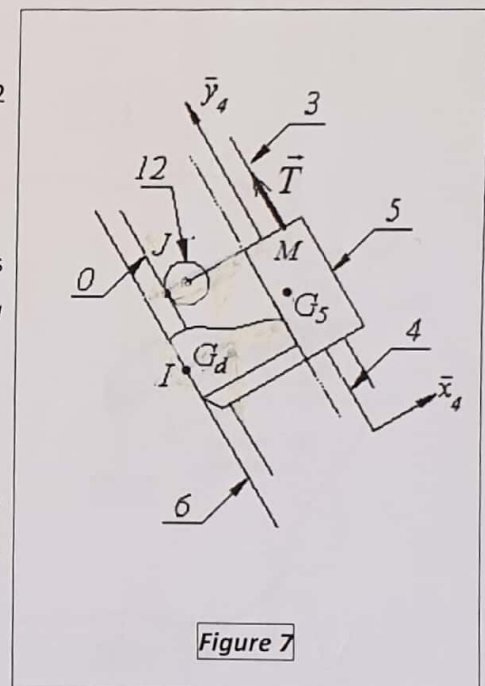


Figure 7

Etude du moteur hydraulique 15 :

L'objectif de cette étude est la détermination de la relation entre la pression hydraulique d'alimentation du moteur hydraulique et le couple transmissible par le rotor 1.

Présentation du moteur hydraulique MS 05 : **figure 8 et figure 9.**

Les applications des moteurs hydrauliques sont extrêmement variées, les plus traditionnelles se situent dans les secteurs des travaux publics, de l'agriculture, de la manutention. Les moteurs hydrauliques sont également utilisés dans une grande

variété de machines industrielles. L'association de la transmission hydraulique et de la régulation électronique a permis d'associer puissance et précision.

Description succincte du moteur hydraulique MS 05 :

Les moteurs hydrauliques à pistons radiaux sont composés de huit pistons radiaux disposés en étoile dans un bloc-cylindres.

L'ensemble arbre de sortie, arbre de frein et bloc-cylindres (1) est animé d'un mouvement de rotation par rapport à l'ensemble carter-came (stator).

Les pistons sont maintenus en contact sur la partie centrale du stator par le fluide sous pression.

La partie centrale de l'ensemble carter-came est une came constituée de 6 lobes identiques.

Un distributeur assure l'admission le refoulement du fluide. Le contact entre le piston (3) et la came (0) se fait par l'intermédiaire d'un galet cylindrique (2), en contact linéique direct avec la came (0) et en liaison pivot avec un piston (3) par un demi-palier lisse.

Le mécanisme à came fixe transforme la translation des pistons (3) par rapport au bloc-cylindres (1) en une rotation de ce même bloc-cylindres (1) par rapport au carter-came (0).

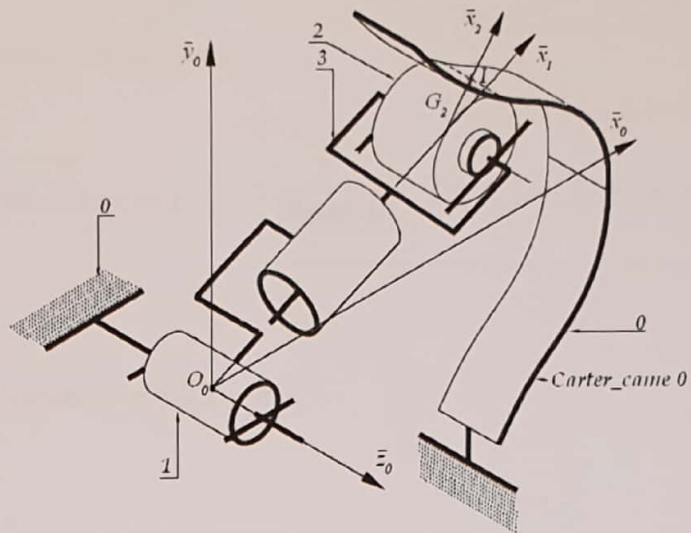


Figure 8

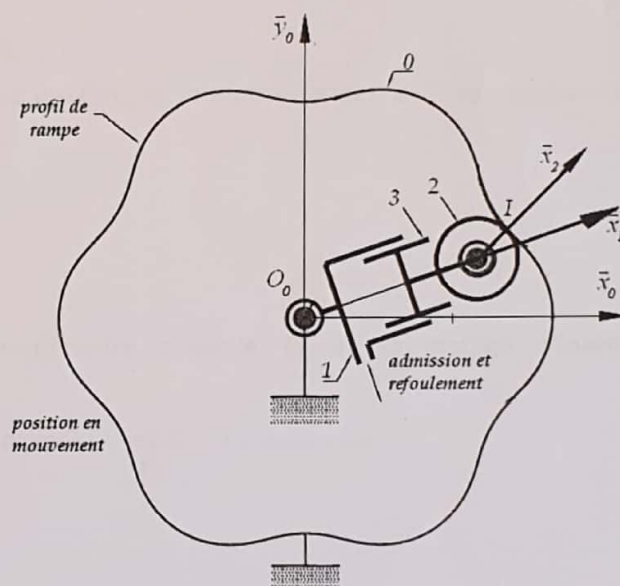


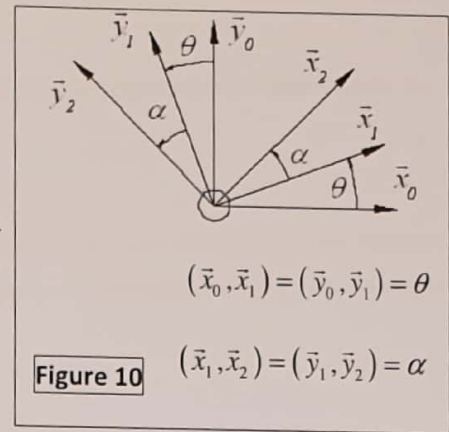
Figure 9

Données : Définition des repères : voir figure 10

$R_0(O_0; \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ Repère galiléen lié au carter-came (0).

$R_1(O_0; \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ Repère lié à l'arbre de sortie et au bloc-cylindres (1).

$R_2(G_2; \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ Repère associé à la définition du contact en I.



Définition des paramètres géométriques :

$$\overline{O_0 G_2} = \rho \cdot \bar{x}_1 \quad (\rho \text{ variable}) \quad \text{et} \quad \overline{G_2 I} = R \cdot \bar{x}_2 .$$

- La liaison 1/0 est pivot d'axe (O_0, \bar{z}_0) .
- La liaison 3/1 est pivot glissant d'axe (G_2, \bar{x}_1) .
- La liaison 2/3 est pivot d'axe (G_2, \bar{z}_0) .
- La liaison 2/0 est linéaire rectiligne de normale (I, \bar{x}_2) et de direction (I, \bar{z}_0) .

Données :

- I_1 moment d'inertie de 1 par rapport à l'axe (O_0, \bar{z}_1)
- la masse du galet 2 est notée m_2 , son centre d'inertie G_2 et sa matrice d'inertie en son centre d'inertie

$$\text{est } I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

- la masse du piston 3 est notée m_3 , son centre d'inertie G_3 et sa matrice d'inertie au

$$\text{point } G_2 \text{ est } I(G_2, 3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad , \quad \text{avec } \overline{G_3 G_2} = l \cdot \bar{x}_1 . \quad l = \text{constante}$$

Hypothèses :

- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- L'action du fluide, intercalé entre l'arbre 1 et le piston 3, est modélisée par un glisseur en G_2 avec $\vec{F}(\text{fluide} \rightarrow 3) = F \cdot \bar{x}_1$
- L'action extérieure exercée sur l'arbre de sortie (1) au niveau du contact entre la chaîne (3) et le pignon (9) (voir figure 5) est modélisée par un torseur couple $\{T_{ext} \rightarrow 1\} \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C \cdot \bar{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$.
- L'action de la pesanteur est négligée.

DEVOIR SURVEILLE DES SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIEUR - MP[✎] et PSI[✎] - DUREE : 2 H

On considère l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.

Question 8 : Justifier la forme de la matrice d'inertie $I(G_2, 2)$ et donner les éléments de symétrie matérielle de 3.

Question 9 : Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.

Question 10 : Par application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble S dans son mouvement par rapport à (0) , déterminer la relation entre F, C , les paramètres cinématiques du moteur hydraulique et $T(S/0)$ l'énergie cinétique de l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.

- $I(A \rightarrow B/A) = I(A \rightarrow B) = 0$ (L. parfaite)
- $I(A \rightarrow B/A) = C_m \text{ ou } m$
- $I(0 \rightarrow 1/0) = \int \{ \vec{v}(0 \rightarrow 1) \} \{ \vec{v}(1/0) \} = \int \{ T_{ed} \cdot \vec{y}_4 + N_{cd} \vec{x}_4 \} \cdot \{ \vec{y}_4 \} = T_{ed} \cdot \vec{y}_4$
- $I(A \rightarrow 1/A) = I(A \rightarrow 5) = 0$
- $I(1 \rightarrow 11/A) = 0$ et $I(0 \rightarrow 12/0) = 0$ car la discussion est sans glissement
- $I(g \rightarrow 2/A) = I(g \rightarrow 2/1) = I \int \{ \vec{v}(g \rightarrow 2) \} \{ \vec{v}(2/1) \} = I \int \{ -m_2 \vec{g} \cdot \vec{y}_{10} \} \cdot \{ \vec{v}(G_2 \in 1/A) \}$

on a: $\vec{v}(G_2 \in 1/A) = \vec{v}(G_2 \in 1/1) = \vec{v}(G_2 \in 3/A) = \vec{v}(G_2 \in 1/A) = \vec{g} \cdot \vec{y}_4$
 donc: $I(g \rightarrow 2/A) = -m_2 g \vec{y}_{10} \cdot \vec{y}_4 = -m_2 g \vec{y}_4 \cdot \cos \psi$

Suit alors l'éq: $J_{eq} \cdot \vec{\omega} = C_m \vec{\omega} + T_{ed} \cdot \vec{y}_4 - m_2 g \vec{y}_4 \cos \psi$

en remplaçant \vec{y}_4 par $R \cdot \vec{e}_m$, et on obtient alors:

$$J_{eq} \cdot \vec{\omega} = C_m + R T_{ed} - m_2 g \cdot R \cos \psi$$

donc: $C_m = J_{eq} \vec{\omega} - R T_{ed} + m_2 g \cdot R \cos \psi$

Q6] on applique les lois de Coulomb: $|T_{ed}| = f |N_{cd}|$
 or: $N_{cd} > 0$ et $T_{ed} < 0$ (sens inverse de $m_2 \vec{g}$)

donc: $T_{ed} = -f N_{cd}$

Q7] TR D a E / \vec{y}_4 p p a 4:

$$T + T_{ed} + m_2 g \vec{y}_4 = m_2 \vec{g}$$

$$T + T_{ed} - m_2 g \vec{y}_{10} \cdot \vec{y}_4 = m_2 \vec{g}$$

ce qui conduit à l'éq: $T + T_{ed} - m_2 g \cos \psi = m_2 \vec{g}$

donc: $T = f N_{cd} - m_2 g \cos \psi = m_2 \vec{g}$

et ensuite: $N_{cd} = \frac{T - m_2 g \cos \psi}{f} = m_2 \vec{g}$

$$N_{cd} = \frac{T - m_2 g \cos \psi}{f}$$

Q8] - 2 paires de $(G_2 \vec{x}_i)$ comme axe de révolution, et en la forme de $\vec{I}(G_2, 2)$

- 3 paires de deux plans de sym. orth. \perp .

Q9] $T(s/0) = T(1/0) + T(2/0) + T(3/0)$

• $T(1/0) = \frac{1}{2} I_1 \vec{\omega}^2$ (Rotation autour d'axe fixe)

• $T(2/0) = \frac{1}{2} \int \{ \vec{v}(2/0) \} \{ \vec{v}(2/0) \} = \frac{1}{2} \int \{ (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \} \cdot \{ \vec{v}(G_2 \in 2/0) \} = \frac{1}{2} \int \{ \vec{v}(G_2 \in 2/0) \} \cdot \{ \vec{v}(G_2, 2/0) \} = \frac{1}{2} \int \{ (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \} \cdot \{ \vec{v}(G_2, 2/0) \}$

3/4

On a: $\vec{v}(G_2 \in 2/0) = \frac{d}{dt} [G_2]_0 = \frac{d}{dt} [P \vec{x}_i]_0 = \dot{P} \vec{x}_i + P \dot{\vec{x}}_i$

et $\vec{v}(G_2, 2/0) = \vec{v}(G_2, 2) + \vec{v}(2/0) = C_2 (\vec{\alpha} + \vec{\omega})$

donc: $T(2/0) = \frac{1}{2} \int \{ C_2 (\vec{\alpha} + \vec{\omega}) \} \cdot \{ C_2 (\vec{\alpha} + \vec{\omega}) \} = m_2 (\dot{P}^2 + P^2 \vec{\omega}^2)$

• $T(3/0) = \frac{1}{2} \int \{ \vec{v}(3/0) \} \{ \vec{v}(3/0) \} = \frac{1}{2} \int \{ \vec{v}(G_2 \in 3/0) \} \cdot \{ \vec{v}(G_2 \in 3/0) \} = \frac{1}{2} \int \{ m_3 \vec{v}(G_2 \in 3/0) \} \cdot \{ \vec{v}(G_2 \in 3/0) \}$

on a: $\vec{v}(G_2 \in 3/0) = \vec{v}(G_2 \in 2/0) + \vec{v}(G_2, 2/0)$ (G_2 centre de la poutre 2-3)

$$\vec{v}(G_2 \in 3/0) = \vec{v}(G_2 \in 2/0) + C_2 \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2)$$

$$= \dot{P} \vec{x}_i + P \dot{\vec{x}}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2) = \dot{P} \vec{x}_i + P \dot{\vec{x}}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2)$$

$$= \dot{P} \vec{x}_i + P (\vec{\omega} \times \vec{r}(G_2))$$

et $\vec{v}(G_2, 2/0) = \vec{v}(G_2, 2) + \vec{v}(2/0) = m_3 \vec{v}(G_2 \in 3/0)$

$$= C_2 \vec{\omega} + m_3 \vec{v}(G_2 \in 3/0) = C_2 \vec{\omega} + m_3 (\dot{P} \vec{x}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2))$$

$$= C_2 \vec{\omega} + m_3 \vec{v}(G_2 \in 3/0) = C_2 \vec{\omega} + m_3 (\dot{P} \vec{x}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2))$$

$$= C_2 \vec{\omega} + m_3 \vec{v}(G_2 \in 3/0) = C_2 \vec{\omega} + m_3 (\dot{P} \vec{x}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2))$$

soit alors: $T(3/0) = \frac{1}{2} \int \{ \vec{v}(G_2 \in 3/0) \} \cdot \{ \vec{v}(G_2 \in 3/0) \} = \frac{1}{2} \int \{ (\dot{P} \vec{x}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2)) \} \cdot \{ (\dot{P} \vec{x}_i + P \vec{\omega} \times \vec{r}(G_2)) \}$

finalement: $T(s/0) = \frac{1}{2} \int \{ \dot{P}^2 + C_2 (\vec{\omega} + \vec{\omega})^2 + m_2 (\dot{P}^2 + P^2 \vec{\omega}^2) + \vec{\omega}^2 (C_2 - m_3 P) + m_3 (\dot{P}^2 + P^2 \vec{\omega}^2) \}$

Q10] schéma d'analyse:



$\frac{d}{dt} T(s/0) = I(\dot{s} \rightarrow s/0) + I_{int}$

• $I_{int} = I(1 \rightarrow 2) + I(1 \rightarrow 3) + I(2 \rightarrow 3)$

$$= I(1 \rightarrow 2) + I(1 \rightarrow 3) + I(2 \rightarrow 3)$$

$$= \int \{ \vec{v}(1 \rightarrow 2) \} \cdot \{ \vec{v}(1 \rightarrow 2) \} + \int \{ \vec{v}(1 \rightarrow 3) \} \cdot \{ \vec{v}(1 \rightarrow 3) \} + \int \{ \vec{v}(2 \rightarrow 3) \} \cdot \{ \vec{v}(2 \rightarrow 3) \}$$

$$= \int \{ \vec{v}(1 \rightarrow 2) \} \cdot \{ \vec{v}(1 \rightarrow 2) \} + \int \{ \vec{v}(1 \rightarrow 3) \} \cdot \{ \vec{v}(1 \rightarrow 3) \} + \int \{ \vec{v}(2 \rightarrow 3) \} \cdot \{ \vec{v}(2 \rightarrow 3) \}$$

$$= F \vec{v}_1 \cdot \vec{v}(G_2 \in 3/1) = F \vec{v}_1 \cdot \frac{d}{dt} [G_2]_1 = F \frac{d}{dt} [G_2]_1$$

$$= F \frac{d}{dt} [P] = F \dot{P}$$

• $I(\dot{s} \rightarrow s/0) = I(0 \rightarrow 1/0) + I(1 \rightarrow 2/0) + I(2 \rightarrow 3/0)$

$= \int \{ \vec{v}(0 \rightarrow 1) \} \cdot \{ \vec{v}(0 \rightarrow 1) \} = C \dot{\theta}^2$

donc l'éq: $\frac{d}{dt} T(s/0) = C \dot{\theta}^2 + F \dot{P}$

4/4